

XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Условия и решения заданий



Великий Новгород, 2015 г.

XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап, Великий Новгород, 6-12 апреля 2015 г. Условия и решения задач. Под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 48 стр.

Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



IX. 1

ВОСТОЧНЫЙ ЭКСПРЕСС

О.С. Угольников

? Поезд движется равномерно на восток со скоростью 50 км/ч. Его пассажиры наблюдают верхнюю кульминацию Луны один раз в сутки в один и тот же момент по Всемирному времени. На какой широте находится поезд? Эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, а также сжатием Земли пренебречь.

! Если пренебречь эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, то можно считать, что она равномерно движется по орбите с запада на восток с периодом $T_L = 27.32$ суток. За 24 часа (t) она пройдет дугу величиной

$$\lambda_L = 360^\circ \frac{t}{T_L} = 13.18^\circ.$$

Сама Земля, обращаясь вокруг своей оси с периодом T_E (23 часа 56 минут и 4 секунды), сделает за сутки целый оборот (так же, с запада на восток) и дополнительно повернется на угол

$$\lambda_E = 360^\circ \frac{t - T_E}{T_E} = 0.986^\circ.$$

В итоге, через 24 часа Луна окажется в верхней кульминации на другом меридиане Земли, смещенном к востоку на величину

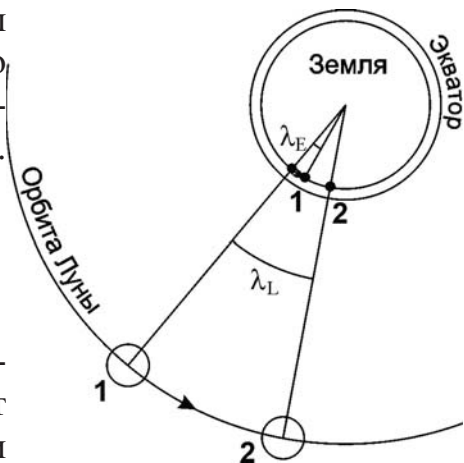
$$\lambda_L - \lambda_E = 12.2^\circ = 0.213 \text{ радиан.}$$

Поезд движется на восток, а верхняя кульминация Луны наблюдается один раз в сутки. Поэтому мы можем не рассматривать случаи совершения поездом более одного оборота вокруг оси Земли за день. Длина окружности параллели Земли с широтой φ равна $R \cos \varphi$, где R – радиус Земли. Путь, который прошел поезд, составляет

$$L = vt = R \cos \varphi (\lambda_L - \lambda_E).$$

Отсюда

$$\varphi = \pm \arccos \frac{vt}{R \cdot (\lambda_L - \lambda_E)} = \pm 28^\circ.$$



IX. 2 УДИВИТЕЛЬНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

? Во время проведения олимпиады, 9 апреля 2015 года, максимума блеска достигает самая известная долгопериодическая переменная звезда Миры ("Удивительная") Кита (прямое восхождение $02^{\text{h}}19^{\text{m}}$, склонение -3.0°). На какой максимальной северной широте на Земле ее можно будет увидеть в этот день при погружении Солнца под горизонт не менее 12° ? Атмосферное поглощение и рефракцию не учитывать. Орбиту Земли считать круговой.

! Максимум Миры Кита произойдет через время t (20 дней) после дня весеннего равноденствия. Считая орбиту Земли круговой, определим, какой путь за это время преодолело Солнце в своем видимом движении по эклиптике:

$$l = 360^\circ \frac{t}{T} \approx 20^\circ.$$

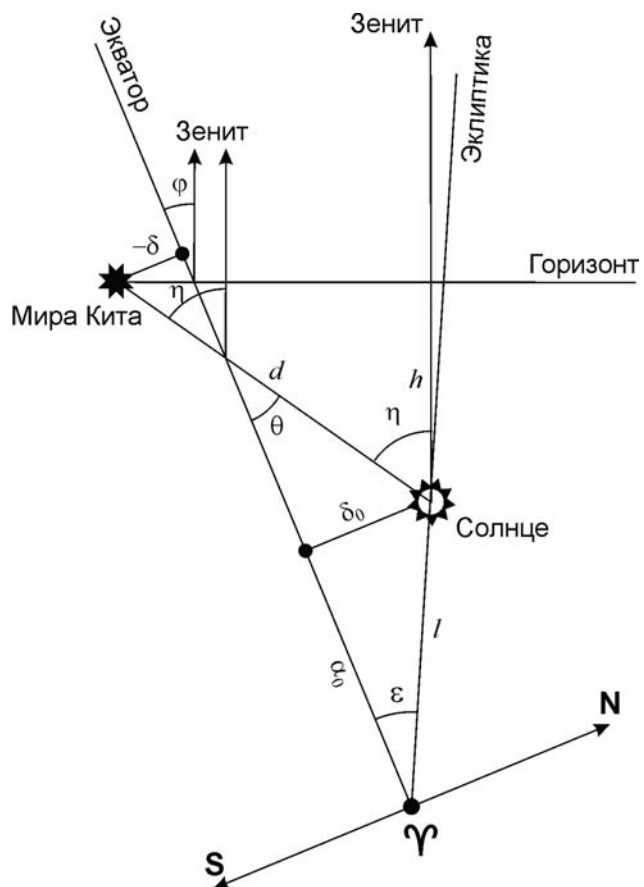
Здесь T – продолжительность года. Солнце сместилось за это время по эклиптике к востоку и к северу. Учитывая, что дуга l невелика, координаты Солнца можно вычислить следующим образом:

$$\alpha_0 = l \cos \varepsilon = 360^\circ \frac{t}{T} \cos \varepsilon = 18^\circ;$$

$$\delta_0 = l \sin \varepsilon = 360^\circ \frac{t}{T} \sin \varepsilon = +8^\circ.$$

Звезда Миры Кита, как видно по координатам, также располагается восточней точки весеннего равноденствия на несколько большем угловом расстоянии. При этом звезда находится южнее Солнца по склонению, и можно ожидать, что наиболее благоприятные условия для ее наблюдения сложатся в южном полушарии Земли, а в северном полушарии она будет видна только до некоторой параллели, широту которой нам и нужно найти. Рассмотрим предельный случай – заход Миры Кита при погружении Солнца под горизонт $h=12^\circ$. Отметим на рисунке положение Солнца, Миры Кита и точки весеннего равноденствия. Все три точки располагаются на небе сравнительно недалеко друг от друга, и соответствующую часть небесной сферы можно изобразить на плоскости (рисунок).

Обозначим прямое восхождение Миры Кита как α , а ее склонение как δ . Переведем прямое восхождение Миры в градусную меру (около 35°). Учитывая, что Солнце и Миры Кита располагаются недалеко от небесного экватора, причем по



разные стороны от него, угловое расстояние между ними можно вычислить по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{(\alpha - \alpha_0)^2 + (\delta - \delta_0)^2} = 20^\circ.$$

Эта величина больше 12° , поэтому Мира Кита может быть видна хотя бы где-нибудь на Земле. Угол между направлением на зенит и линией "Солнце – Мира Кита" равен

$$\eta = \arccos \frac{h}{d} = 53^\circ.$$

Учитывая, что картина наблюдается вблизи экватора, угол между линией "Солнце – Мира Кита" и экватором можно вычислить как

$$\theta = \arctg \frac{\delta_0 - \delta}{\alpha - \alpha_0} = 33^\circ.$$

Угол между направлением на зенит и экватором равен

$$\varphi = \eta - \theta = 20^\circ.$$

Это и есть максимальная северная широта, где Мира Кита может быть видна при погружении Солнца под горизонт не менее 12° .

IX. 3 ТРАНЗИТ ДЛИНОЮ В ДЕНЬ

О.С. Угольников

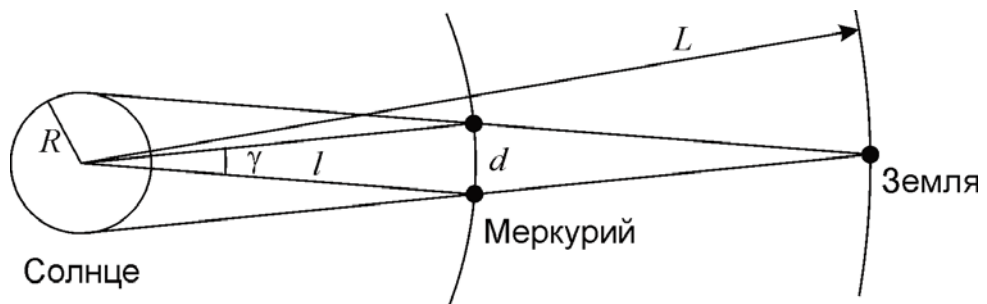
? При наблюдении из некоторого пункта в России прохождение Меркурия по диску Солнца началось на восходе Солнца, а закончилось на его заходе. В какой месяц года это произошло? Орбиту Меркурия считать круговой.

! Определим, какую продолжительность могут иметь прохождения Меркурия по диску Солнца. Для простоты будем считать размеры Меркурия и Земли много меньшими размеров Солнца. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с Землей. В этой системе Меркурий будет обращаться вокруг Солнца с синодическим периодом S . По ходу прохождения Меркурий преодолевает расстояние d , равное

$$d = \frac{2R \cdot (L - l)}{L}.$$

Здесь R – радиус Солнца, l и L – расстояния от Солнца до Меркурия и Земли. Дуга, которую при этом Меркурий пройдет по орбите (в данной системе), составляет

$$\gamma = \frac{d}{l} = \frac{2R \cdot (L - l)}{Ll}.$$



Продолжительность центрального прохождения Меркурия по диску Солнца составит

$$t = \frac{S \cdot \gamma}{2\pi} = \frac{S \cdot R \cdot (L - l)}{\pi L l} = 6.5 \text{ час.}$$

Это существенно меньше 12 часов. Даже если мы учтем эллиптичность орбиты Меркурия, это не изменит ситуацию. Как известно, прохождение Меркурия по диску Солнца может наступить только вблизи двух узлов его орбиты в мае и ноябре. Из этих двух месяцев, столь коротким световой день в России может быть только в ноябре.

Ситуация, близкая к описанной в условии задачи, случится 13 ноября 2032 года на востоке Мурманской области России. Данное прохождение Меркурия не будет центральным и продлится еще меньше: около 4.5 часов.

IX. 4 НАВИГАЦИЯ В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Е.Н. Фадеев

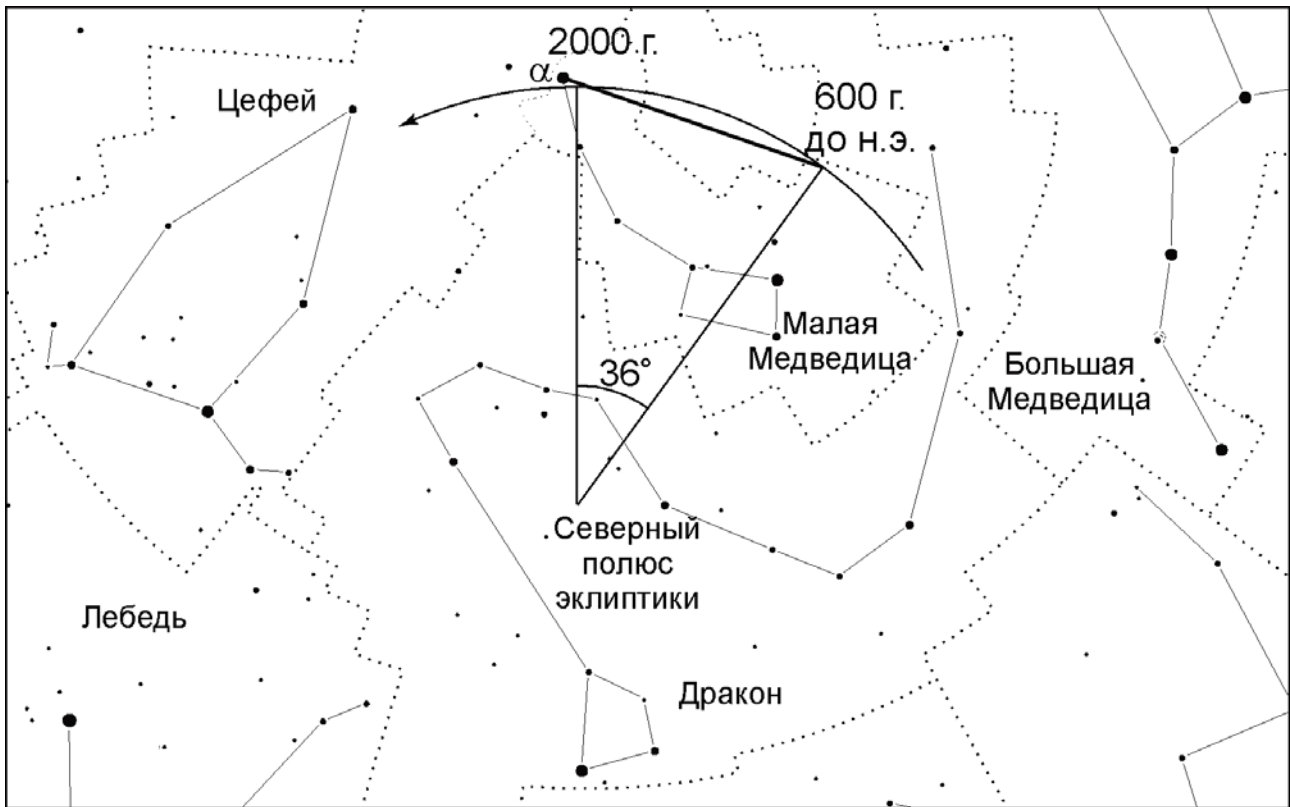
? На сколько градусов отстояла от северного полюса мира звезда α Малой Медведицы во времена плавания финикийцев вокруг Африки (около 600 г. до н. э.)?

! В данный момент α Малой Медведицы, или Полярная звезда, располагается менее чем в 1° от северного полюса мира. Собственное движение Полярной очень мало и на решение задачи не влияет. Единственное явление, значимо меняющее положение Полярной звезды относительно полюса мира – это прецессия земной оси.

В результате явления прецессии северный полюс мира движется среди звезд по малому кругу на расстоянии $\varepsilon = 23.4^\circ$ от полюса эклиптики с периодом, примерно равным 26000 лет. Плавание финикийцев состоялось 2600 лет назад, что составляет 1/10 от периода прецессии. За это время полюс мира переместился на 36° по эклиптической долготе. Данная величина измеряется вдоль эклиптики, а полюс мира находится на угловом расстоянии $90^\circ - \varepsilon = 66.6^\circ$ от нее. Поэтому длина дуги малого круга, по которой за 2600 лет переместился полюс мира, равна

$$\gamma = 36^\circ \cos 66.6^\circ \approx 14^\circ.$$

Расстояние на сфере измеряется вдоль дуг больших кругов, а мы нашли длину малого круга. Но, поскольку искомая величина, как и сама дуга, невелика, разли-



чие между длиной дуг большого и малого кругов мало, и наше приближение верно. Воспользовавшись формулами сферической тригонометрии, мы можем уточнить наше значение лишь на доли градуса.

Тот факт, что Полярная не совпадает с полюсом мира, а находится на некотором расстоянии от него, также особо не влияет на решение задачи, поскольку это расстояние в 10 с лишним раз меньше найденной величины.

IX. 5 ЧЕТЫРЕ ЗВЕЗДЫ

О.С. Угольников

? Звезды 1, 2, 3 и 4 имеют видимый блеск ровно 1^m , 2^m , 3^m и 4^m соответственно. Расстояния до них составляют ровно 1, 2, 3 и 4 пк. Расположите эти звезды в порядке убывания светимости. Межзвездным поглощением света пренебречь.

! Так как нас интересует соотношение светимостей звезд, мы можем использовать относительные величины. Обозначим яркость звезды 0^m за единицу. Тогда яркость звезды с величиной m будет равна

$$J_m = \frac{1}{2.512^m}.$$

Видимая яркость обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды. Поэтому светимость звезды пропорциональна видимой яркости, умноженной на квадрат расстояния:

$$B \sim \frac{r^2}{2.512^m}.$$

Звезда	B_m
1	0.398
2	0.634
3	0.568
4	0.402

В нашем случае для четырех звезд r (пк) = m , и для выяснения соотношения светимостей нужно рассчитать значения

$$B_m = \frac{m^2}{2.512^m}.$$

Занесем результаты в таблицу (справа). Мы видим, что светимость самая высокая у звезды 2, затем идут звезды 3, 4 и, наконец, 1.

IX. 6 ЗВЕЗДНЫЙ ДОМ

А.Н. Акинъщиков

? Наша Галактика состоит из 100 миллиардов звезд, большая часть которых расположена в диске радиусом 20 кпк и толщиной 500 пк. Считая, что физические двойные системы могут существовать, если расстояние между компонентами не больше 1/10 от среднего расстояния между соседними звездами в диске Галактики, определите максимальное расстояние до физической пары, разрешимой невооруженным глазом. Считать распределение звезд в диске Галактики равномерным.

! Определим концентрацию звезд в диске Галактики:

$$n = \frac{N}{\pi R^2 d} = 0.16 \text{ пк}^{-3}.$$

Здесь N – число звезд в Галактике, R – радиус ее диска, d – его толщина. Среднее расстояние между звездами равно

$$l = n^{-1/3} = 1.8 \text{ пк}.$$

Получается, что максимальное расстояние между компонентами двойной системы составляет 0.18 пк. Угловое разрешение человеческого глаза равно 1' (0.0003 радиан), поэтому максимальное расстояние до двойной системы есть

$$0.18/0.0003 = 600 \text{ пк}.$$

Яркие звезды-гиганты вполне могут быть заметны глазом с такого расстояния.

X. 1

СИНХРОННЫЕ СПУТНИКИ

О.С. Угольников

? Два искусственных спутника Земли при наблюдении из определенной точки экватора нашей планеты всегда одновременно восходят, проходят через зенит и заходят за горизонт. Орбиты спутников круговые, расположены в экваториальной плоскости, спутники движутся по ним вокруг Земли в одном направлении. При этом радиусы орбит отличаются ровно вдвое. Найдите эти радиусы орбит. Суточным параллаксом спутников пренебречь.

! Спутники обращаются вокруг Земли в той же плоскости, что и сам наблюдатель за счет осевого вращения Земли. Одновременный восход, кульминация в зените и заход спутников в пренебрежении параллаксом означает равенство их синодических периодов S . Для этих периодов справедливо соотношение:

$$\frac{1}{S_{1,2}} = \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_{1,2}} \right|; \quad \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_1} \right| = \left| \frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_2} \right|.$$

Здесь $T_{1,2}$ – орбитальные периоды спутников, T_0 – период осевого вращения Земли (23.934 часа). Знак "+" соответствует встречному вращению спутника по отношению к вращению Земли, знак "-" будет иметь место в случае одного направления вращения Земли и спутника. Коль скоро известно, что спутники движутся вокруг Земли в одном направлении, эти знаки для них должны быть одинаковы. В случае знака "+" выражения под модулем положительны, и равенство выполняется только для одинаковых орбит ($T_1=T_2$), что противоречит условию задачи. Итак, мы должны рассмотреть случай со знаками "-":

$$\left| \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right| = \left| \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2} \right|.$$

Мы вновь не рассматриваем тривиальный случай $T_1=T_2$. Пусть $T_2>T_1$, тогда $(1/T_1)>(1/T_2)$. Равенство может быть выполнено, если выражение под модулем в левой части будет отрицательным, в правой части – положительным, то есть:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}.$$

Это выражение можно переписать как

$$\frac{T_1 T_0}{T_0 - T_1} = \frac{T_2 T_0}{T_2 - T_0}.$$

Отсюда

$$T_1(T_2 - T_0) = T_2(T_0 - T_1).$$

Вспомним, что $T_2 > T_1$, а радиусы орбит спутников отличаются в 2 раза. По III закону Кеплера

$$\frac{T_2}{T_1} = K = 2^{3/2}.$$

Подставляя это в соотношение периодов, имеем:

$$KT_1^2 - T_1T_0 = KT_1T_0 - KT_1^2.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$T_1 = \frac{(K+1)T_0}{2K}; \quad T_2 = KT_1 = \frac{(K+1)T_0}{2}.$$

Численные значения периодов равны 16.20 и 45.82 часа. Радиусы орбит спутников составляют

$$R_{1,2} = \left(\frac{GMT_{1,2}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Здесь M – масса Земли. Радиусы орбит равны 32.4 и 64.8 тысячи километров.

X. 2

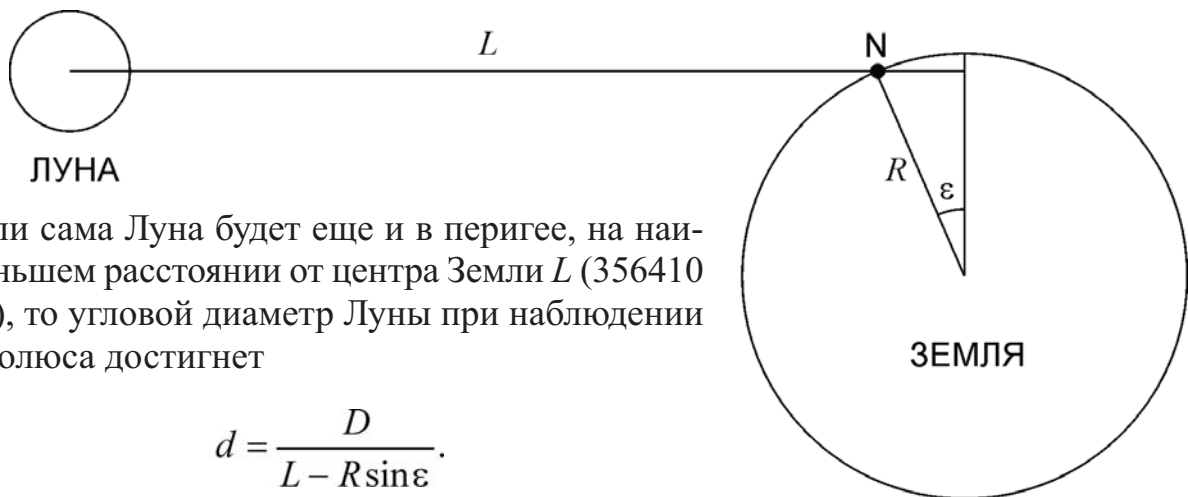
ЗАТМЕНИЕ НА ПОЛЮСЕ

А.Н. Акинъщиков

? 20 марта 2015 года произошло полное солнечное затмение, которое было видно на северном полюсе Земли. Продолжительность полной фазы там составила около 2 минут. Определите, какая максимальная продолжительность полной фазы может вообще быть у солнечного затмения на северном полюсе Земли.

! Очевидно, двухминутное полное солнечное затмение – не самое продолжительное, которое может случиться на северном полюсе Земли. Затмение 2015 года наступило в весеннее равноденствие, и Солнце и Луна едва появились над горизонтом за счет явления атмосферной рефракции. В это время расстояние до Луны не было минимально возможным. Солнце, в свою очередь, не было в своей самой удаленной точке от Земли.

Затмение с наибольшей продолжительностью может наступить на северном полюсе в конце июня – начале июля. В это время Солнце и Луна будут располагаться на высоте ε (около 23.4°), и точка наблюдения будет приближена к Луне (см. рисунок):



Если сама Луна будет еще и в перигее, на наименьшем расстоянии от центра Земли L (356410 км), то угловой диаметр Луны при наблюдении с полюса достигнет

$$d = \frac{D}{L - R \sin \varepsilon}.$$

Здесь R – полярный радиус Земли. В угловой мере величина d составит $33'46''$. Солнце в июне – начале июля, напротив, находится дальше всего от Земли, и его угловой диаметр d_0 уменьшается до $31'31''$. Полное солнечное затмение может продолжаться, пока Луна преодолевает на небе относительно Солнца угловое расстояние $d - d_0$, равное $2'15''$. Северный полюс не движется за счет осевого вращения Земли, и перемещение Луны будет происходить с той же угловой скоростью, с какой она движется по орбите (с очень малой параллактической поправкой на приближенное положение наблюдателя, необязательной для учета). В соответствии со II законом Кеплера, тангенциальная скорость тела по ходу движения по орбите пропорциональна $(1/L)$, а угловая скорость – $(1/L)^2$, где L – расстояние до него. Во время затмения в перигее при наблюдении с полюса данная угловая скорость составляет

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{L_0}{L} \right)^2 \cdot \frac{L}{L - R \sin \varepsilon}.$$

Здесь L и L_0 – наименьшее и среднее расстояние Луны от Земли, T – орбитальный период Луны. Данная угловая скорость составляет $0.643'$ в минуту. Практически в том же направлении перемещается относительно звезд и Солнце, угловая скорость в случае малого эксцентриситета орбиты Земли e равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} (1 - e)^2.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли. Угловая скорость составляет $0.040'$ в минуту. Максимальная продолжительность полного солнечного затмения на северном полюсе Земли составит

$$t = \frac{d - d_0}{\omega - \omega_0} = 3^{\text{M}}44^{\text{C}}.$$

Полное солнечное затмение длительностью в $3^{\text{M}}13^{\text{C}}$ произошло в непосредственной близости от северного полюса ровно 200 лет назад, 6 июля 1815 года.

Х. 3**ДАЛЕКИЙ РАДИОИСТОЧНИК**

О.С. Угольников

? Короткий одиночный импульс от далекого ради источника был принят 21 марта в $06^{\circ}00'00.0000^{\circ}$ по всемирному времени радиотелескопами вблизи Мурманска (69° с.ш., 30° в.д.), в Индонезии (0° ш., 99° в.д.) и Антарктиде (69° ю.ш., 30° в.д.). Определите экваториальные координаты источника на небе. Уравнением времени и сжатием Земли пренебречь.

! Коль скоро импульс от ради источника был принят в данных трех пунктах одновременно со столь высокой точностью, можно сделать вывод, что расстояние от источника до всех трех пунктов одинаково. Иными словами, плоскость, содержащая три пункта, перпендикулярна направлению на источник. А это означает, что высота источника над горизонтом в этих пунктах также одинакова, а сами пункты равноудалены от той точки поверхности Земли, где источник находился в зените.

По координатам можно увидеть, что все три пункта удалены на 69° по поверхности Земли от точки (0° ш., 30° в.д.). Очевидно, что именно при наблюдении из нее указанный источник находился в зените. Есть и другая точка (0° ш., 150° з.д.), также равноудаленная от всех пунктов, но уже на 121° . Источник не мог находиться там в зените, так как в этом случае он не был бы виден из указанных трех наблюдательных пунктов.

Источник находится в зените на экваторе, следовательно, его склонение равно нулю. Чтобы определить его прямое восхождение, учтем, что в день весеннего равноденствия в любом наблюдательном пункте звездное время отличается от местного времени на 12 часов. Всемирное время есть местное время на нулевом меридиане, и в 6 часов утра звездное время там составляет 18 часов. На долготе λ , равной $+30^{\circ}$ или $+2$ часам, звездное время составит 20 часов. Источник, находящийся в этот момент в зените (в верхней кульминации), должен иметь такое же прямое восхождение. Итак, координаты источника: $\alpha = 20^{\text{ч}}$, $\delta = 0$.

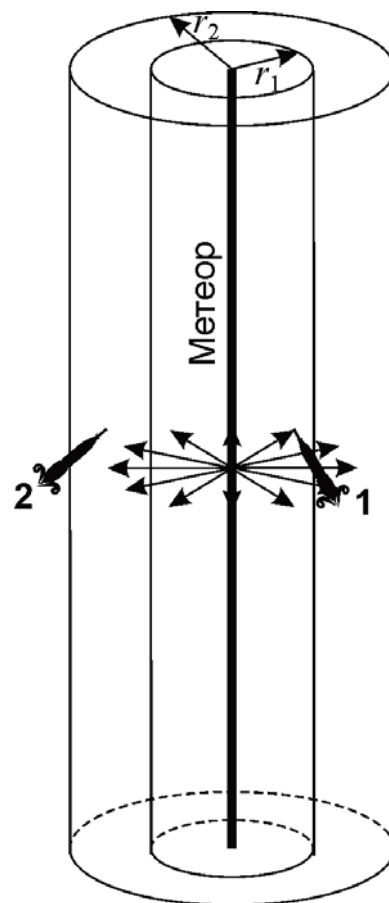
Х. 4**ВБЛИЗИ МЕТЕОРА**

О.С. Угольников

? Метеор загорелся на высоте 100 км и погас на высоте 60 км, двигаясь строго вертикально и имея постоянную скорость и светимость. Геофизическая ракета, расположенная в 2 км от траектории метеора на высоте 80 км, измерила суммарный поток энергии от метеора за время полета, который оказался равен потоку от звезды $-5.0^{\text{м}}$ (за то же время). Какой результат дадут аналогичные измерения с другой геофизической ракетой на той же высоте в 4 км от траектории метеора?

! С первого взгляда может показаться, что вторая геофизическая ракета, расположенная вдвое дальше от метеора, чем первая, должна зафиксировать вчетверо меньшую яркость. Это было бы так, будь метеор точечным объектом. Однако, как сказано в условии, метеор имел длину 40 км, что существенно больше расстояния от обеих ракет до середины его траектории. И если расстояния от ракеты до средней точки метеора будут различаться в 2 раза, то для более далеких частей траектории это отношение будет меньшим.

Считая длину метеора много большей расстояния до аппаратов, изобразим цилиндры, осью которых будет траектория метеора, а поверхности проходят через геофизические ракеты. Высота цилиндров значительно больше их радиусов, и практически вся световая энергия от метеоров будет проходить через боковые поверхности цилиндров. Для второй ракеты их площадь вдвое больше, чем для первого. Поэтому и суммарный энергетический поток от метеора, зафиксированный этой ракетой, будет вдвое, а не вчетверо меньшим, чем для первой ракеты. Общая звездная величина метеора для второй ракеты составит



$$m_2 = m_1 - 2.5 \lg \frac{r_2}{r_1} = -4.25.$$

Точный анализ (не требуемый для решения задачи) показывает, что вторая геофизическая ракета зафиксирует яркость метеора, соответствующую звезде -4.18^m , что мало отличается от полученного ответа.

Х. 5

СОЛНЦЕ СКВОЗЬ ДУРШЛАГ

А.Н. Акинъщиков

? Как известно, обычный дуршлаг можно использовать для наблюдений Солнца, в частности, во время частных солнечных затмений, проецируя изображения Солнца на светлый экран. Каким должно быть расстояние от дуршлага до экрана, чтобы условия для наблюдений были наилучшими? Какое угловое разрешение при этом может быть достигнуто? Считать, что наблюдатель находится рядом с дуршлагом, на том же расстоянии от экрана. Параметры дуршлага: диаметр – 20 см, диаметр отверстий – 2 мм, расстояние между центрами отверстий – 10 мм.

! При таких наблюдениях каждое отверстие дуршлага играет роль камеры-обскуры, формируя изображение яркого объекта на экране. Максимальное угловое разрешение будет ограничено несколькими факторами. Первое и самое простое ограничение связано с тем, что для наблюдателя, находящегося рядом с дуршлагом, угловой размер изображения будет равен реальному угловому диаметру Солнца. Соответственно, при таком масштабе (1:1) человеческий глаз не сможет превысить разрешения $\rho_E = 1'$ независимо от расстояния между дуршлагом и экраном L .

Следующее ограничение связано с явлением дифракции, которое будет происходить на отверстиях дуршлага. Для видимого света (длина волны 550 нм) угловой размер дифракционного кружка от точечного источника составит

$$\rho_D = 1.22 \frac{\lambda}{d} \approx 1'.$$

Здесь d – диаметр отверстия. Полученная величина также не зависит от расстояния между дуршлагом и экраном. Получается, что дифракция не накладывает дополнительных ограничений на разрешение, но при этом лишает наблюдателя смысла приближаться к экрану ближе, чем дуршлаг.

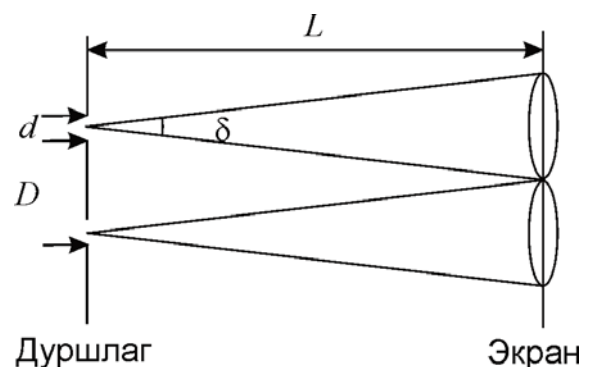
Если наблюдать со стороны экрана, то отверстия дуршлага будут иметь заметные размеры, и в определенную точку экрана будет попадать свет от разных участков Солнца. Можно считать, что разрешение в этом случае ограничено величиной

$$\rho_R = \frac{r}{L} = \frac{d}{2L} \approx \frac{3'}{L(\text{м})}.$$

Здесь r – радиус отверстий. Детали с такими угловыми размерами будут видны с сильным размытием, для большей четкости они должны быть вдвое большими (соответствуя не радиусу, а диаметру отверстий). Это ограничение ослабляется, если увеличить расстояние до экрана. Однако тогда размер изображений Солнца (угловой диаметр δ) на экране будет возрастать, и в какой-то момент эти изображения начнут накладываться друг на друга. Это произойдет, когда размер изображения станет равным расстоянию между отверстиями D . Определим соответствующее расстояние до экрана:

$$L_0 = \frac{D}{\delta} \sim 1 \text{ м.}$$

Можно сделать вывод, что именно такое расстояние будет оптимальным, и предельное разрешение составит $3'$ или чуть хуже. Может показаться, что ситуацию можно улучшить, закрыв часть отверстий дуршлага и еще увеличив расстояние. Но в реальности это приведет к ослаблению яркости изображений Солнца на экране, и они потеряются на фоне постороннего дневного света.



Х. 6**ЮЖНАЯ ЗВЕЗДА**

Е.Н. Фадеев

? Прямое восхождение одиночной звезды равно $18^{\text{ч}}$, а ее склонение $-23^{\circ}26'$. Собственное движение по склонению у этой звезды в настоящий момент отсутствует, а по прямому восхождению оно равно $1''/\text{год}$ и направлено на запад. Будет ли видно эту звезду на северном полюсе Земли, и если будет, то через сколько лет? Лучевой скоростью звезды, атмосферной рефракцией и ослаблением света пренебречь.

! Как видно по координатам, звезда находится в точке зимнего солнцестояния, которая на северном полюсе Земли наблюдаться не может. Для того, чтобы понять, когда звезда сможет появиться на небе северного полюса, обратим внимание, что ее собственное движение направлено на запад, то есть вдоль большого круга небесной сферы – эклиптики.

На северном полюсе можно наблюдать только северную часть эклиптики. Чтобы появиться над горизонтом, звезда должна оказаться в точке весеннего или осеннего равноденствия. Звезда движется вдоль эклиптики навстречу годичному движению Солнца со скоростью $1''/\text{год}$, которую можно считать постоянной (так как у звезды в настоящий момент нет лучевой скорости).

Известно, что в результате прецессии точка весеннего равноденствия также смещается относительно звезд навстречу годичному движению Солнца и обходит всю эклиптику примерно за 26000 лет, что соответствует скорости

$$360 \cdot 3600'' / 26000 \sim 50''/\text{год}.$$

Таким образом, точка весеннего равноденствия догоняет нашу звезду. Поскольку изначально собственное движение было направлено вдоль эклиптики, а сама плоскость эклиптики не меняет своего положения, звезда все время остается в этой плоскости. Примерно через 6500 лет звезда появится над горизонтом на северном полюсе Земли. Учет собственного движения особо не влияет на ответ, поскольку его вклад меньше, чем погрешность используемой простейшей модели прецессии.

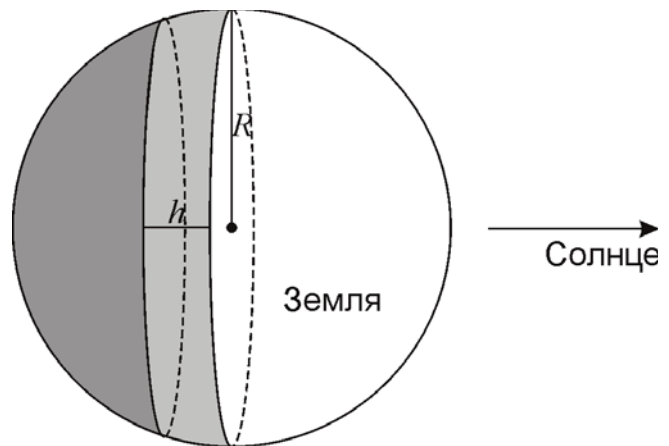
XI. 1 СУМЕРКИ

Е.Н. Фадеев

? Определите, на какой части поверхности Земли сейчас наблюдаются сумерки (в любой их стадии)? Угловыми размерами Солнца и рефракцией пренебречь. Решение дополните рисунком.

! По определению, сумерки продолжаются, пока Солнце находится в пределах высот от 0° до -18° . Будем считать Землю шаром. Тогда сумерки наблюдаются на сферической части поверхности шарового слоя, заключенного между полушарием, где в данный момент день, и сегментом, где ночь. Высота этого шарового слоя равна

$$h = R \sin 18^\circ.$$



Площадь сферической поверхности шарового слоя равна $2\pi Rh$. Сравнивая её с площадью всего земного шара, получаем величину части, погруженной в сумерки:

$$S_T = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{\sin 18^\circ}{2} \approx 0.15.$$

Площадь поверхности шарового сегмента может быть оценена, если мы заменим сегмент, например, цилиндром или усеченным конусом. В случае цилиндра ответ получается фактически таким же, поскольку площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по той же формуле, что и площадь сферической части шарового слоя.

XI. 2 ЗВЕЗДА НА МАТОВОМ СТЕКЛЕ

О.С. Угольников

? Телескоп-рефрактор с относительным отверстием 1:5 и прямой каркасной трубой навели на звезду 0^m . Затем с него сняли окуляр и поставили в фокальную плоскость матовую стеклянную пластинку. Какую звездную величину будет иметь изображение звезды на пластинке, если наблюдатель находится рядом с объективом (сбоку от него, не затеняя ход лучей звезды в телескопе)? Считать, что матовое стекло рассеивает весь свет в обе стороны от себя, причем равномерно во всех направлениях.

! Обозначим поток энергии от звезды через J . Количество энергии, которое за единицу времени попадет в телескоп с диаметром объектива D и соберется в изображении звезды в фокальной плоскости, составит

$$E = J \frac{\pi D^2}{4}.$$

Матовое стекло отразит этот свет равномерно во всех направлениях. Если наблюдатель находится рядом с объективом, на фокусном расстоянии F от пластинки, то поток энергии от изображения звезды около него будет равен

$$j = \frac{E}{4\pi F^2} = \frac{J}{16} \left(\frac{D}{F}\right)^2.$$

Диаметр объектива D и его фокусное расстояние F неизвестны, но задано их отношение, равное 1:5. Звездная величина изображения звезды с блеском m_0 на матовом стекле будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg \frac{j}{J} = m_0 - 5 \lg \frac{D}{4F} = m_0 - 5 \lg \frac{1}{20} = 6.5.$$

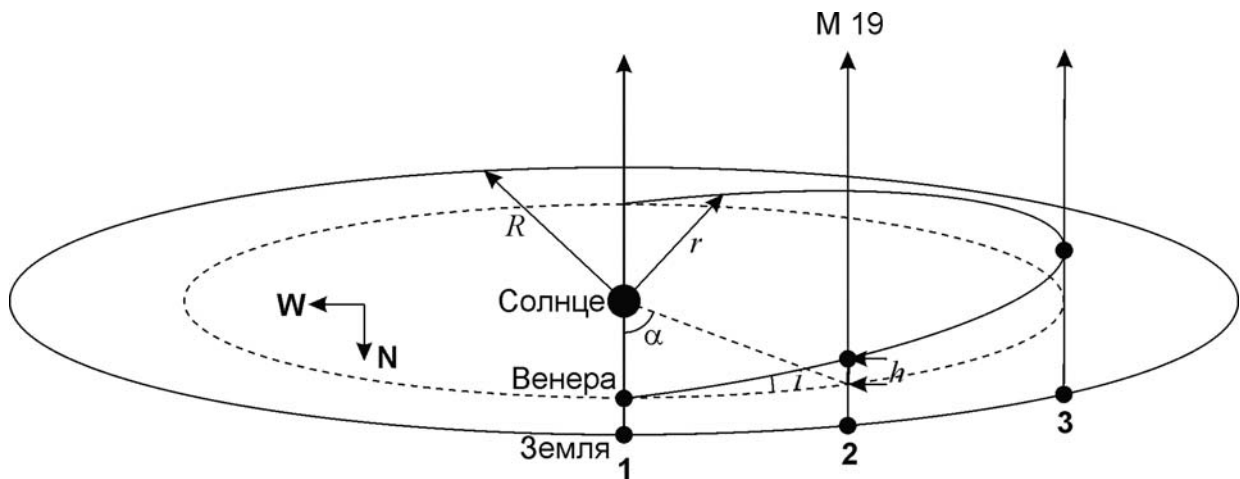
XI. 3 ПЛАНЕТА И СКОПЛЕНИЕ

О.С. Угольников

? Орбита планеты Венера наклонена к плоскости эклиптики на угол 3.4° , долгота восходящего узла равна 77° . Шаровое звездное скопление М19 в созвездии Змееносца имеет эклиптические координаты: долгота 257° , широта -3.5° , угловой диаметр $14'$. Может ли Венера (при наблюдении с Земли) пройти по этому скоплению? Орбиты планет считать круговыми.

! Близость угла наклона орбиты Венеры к эклиптике и эклиптической широты скопления (по модулю) может наводить на мысль, что планета может в пределе пройти по скоплению, находясь на максимальном удалении от эклиптики. Однако, реальная ситуация сложнее, и для решения задачи нам необходимо учесть ориентацию орбиты Венеры в пространстве.

Известно, что в нижнем соединении, находясь на минимальном расстоянии от Земли, Венера может удаляться на небе на 8° от эклиптики. Но заметим, что эклиптическая долгота скопления на 180° отличается от долготы восходящего узла орбиты Венеры. То есть, если бы Венера и Земля одновременно оказались на гелиоцентрической долготы 77° (такое могло бы случиться в нижнем соединении в начале декабря), то мы бы стали свидетелями прохождения Венеры по диску Солнца, а скопление М19 оказалось позади Солнца и Венеры, находясь в 3.5° южнее них на небе. В этом случае говорить о возможном прохождении Венеры по скоплению не приходится. Рассмотрим другие возможные взаимные положения Венеры и Земли, при которых Венера окажется на небе рядом со скоплением (на той же эклиптической долготы). Для этого изобразим орбиты обеих планет, при-



чем расположим сверху рисунка южный полюс эклиптики (так как скопление имеет отрицательную эклиптическую широту). Очевидно, что нас будет интересовать южная (по отношению к эклиптике) половина орбиты Венеры, так как именно на ней планета может подойти к М19 при наблюдении с Земли.

Так как угол наклона орбиты Венеры к эклиптике невелик, то проекцию орбиты на плоскость эклиптики можно считать окружностью с тем же радиусом. Пусть Земля и Венера находятся в каком-либо из положений 1, 2 или 3 так, что проекция отрезка между ними параллельна линии узлов орбиты. Продолжение этого отрезка за Венеру указывает на точку эклиптики с долготой 257° , находящуюся рядом с шаровым скоплением. Пусть Венера отстоит от узла орбиты на угол α . Тогда ее расстояние от плоскости эклиптики составит

$$h = r i \sin \alpha.$$

Здесь r – радиус орбиты Венеры, i – угол ее наклона к эклиптике, выраженный в радианах, мы вновь учли малость этого угла. Теперь определим расстояние между Землей и проекцией Венеры на плоскость эклиптики, для чего построим рисунок в плоскости эклиптики (вновь со стороны юга, внизу страницы).

В треугольнике «Солнце-Венера-Земля» нам известны две стороны и угол, не лежащий между ними (с вершиной в проекции Венеры, он равен $\pi - \alpha$). Запишем выражение теоремы косинусов:

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \alpha) = r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha.$$

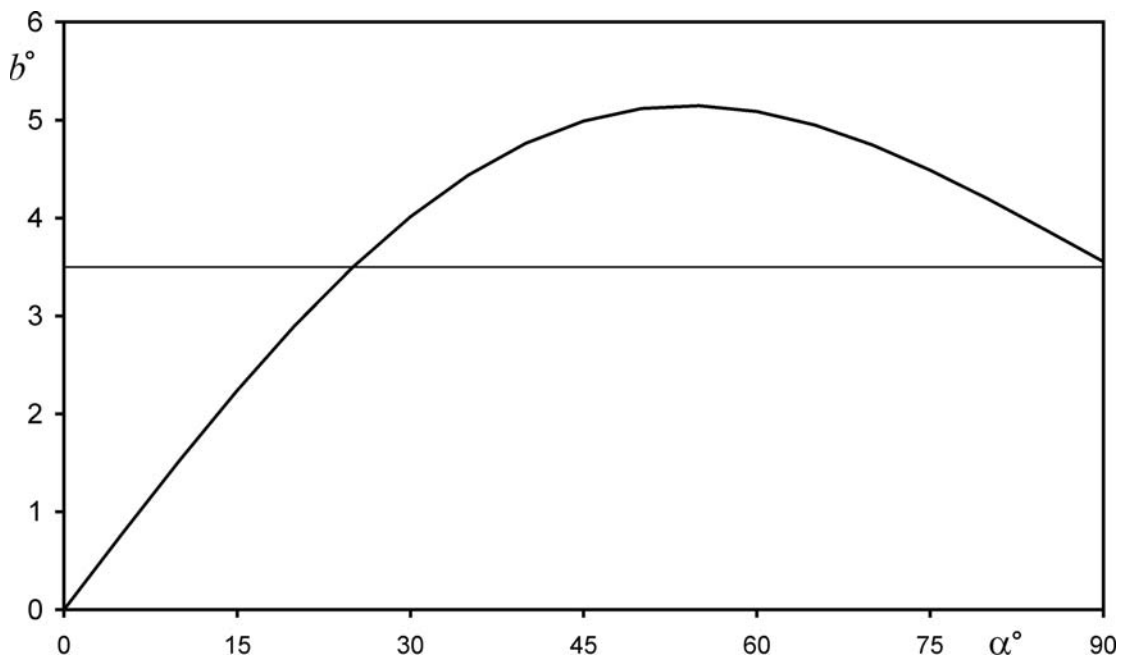
Это квадратное уравнение имеет один положительный корень:

$$d = -r \cos \alpha + \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha - r^2 + R^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha.$$

Модуль эклиптической широты Венеры при наблюдении с Земли составит

$$b = \frac{h}{d} = \frac{r i \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha}.$$





Можно построить график величины b для углов α от 0° до 90° (то есть для положений Венеры между нижним соединением и наибольшей восточной элонгацией).

Подробный анализ (не требующийся от участников олимпиады) показывает, что максимальная (по модулю) эклиптическая широта Венеры в этой области неба будет достигнута при

$$\alpha = \arccos \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \approx 54^\circ$$

и составит

$$b_0 = \frac{irR}{R^2 - r^2} \approx 5.1^\circ.$$

Мы видим, что величина b может значительно превосходить по модулю эклиптическую широту скопления М19, и Венера может пройти по этому скоплению.

Приведенное выше решение является полным. Однако ответить на вопрос касательно конкретного скопления М19 можно проще. Для этого достаточно рассмотреть только случай наибольшей восточной элонгации (положение 3 на рисунке слева сверху). Тогда угол α равен 90° , расстояние между Землей и Венерой вычисляется по теореме Пифагора:

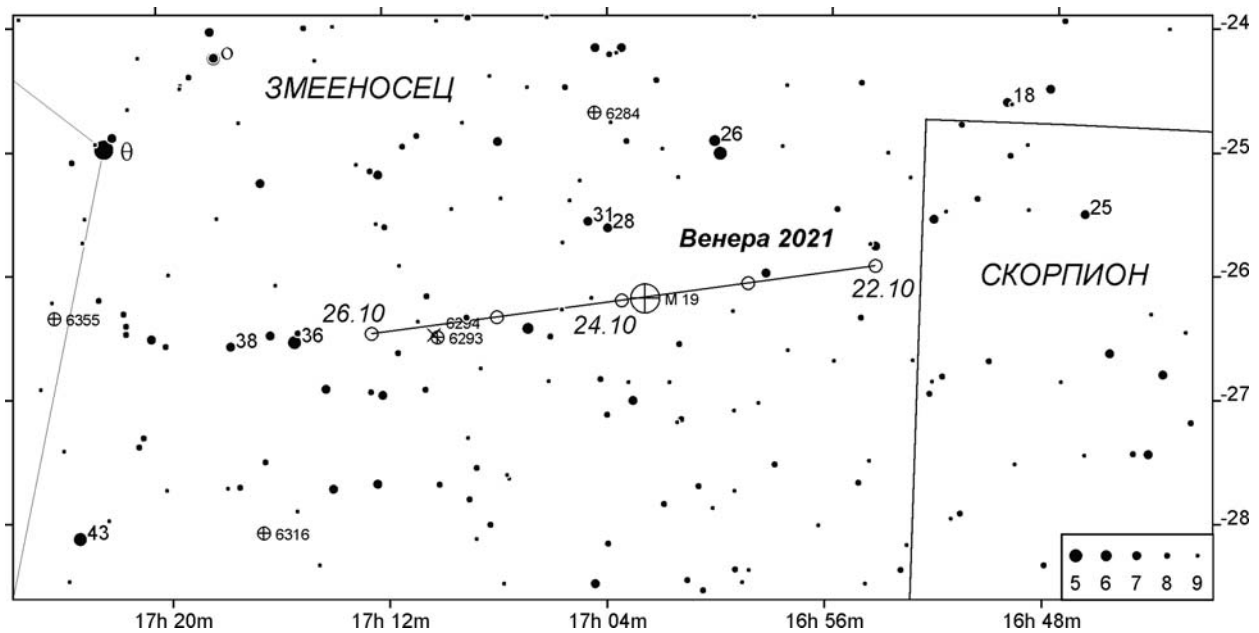
$$d = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Модуль эклиптической широты Венеры будет равен

$$b = \frac{h}{d} = \frac{ri}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 3.55^\circ.$$

Учитывая угловой размер скопления (около 0.2°) сразу делаем вывод, что в случае наибольшей восточной элонга-





ции на данной эклиптической долготе (это соответствует 20-м числам октября) прохождение Венеры по М19 обязательно произойдет. Более того, именно сейчас такие явления случаются регулярно. Венера прошла по краю М19 23 октября 2013 года, а еще через 8 лет, вечером 23 октября 2021 года, пройдет по его центру.

XI. 4 МЕЖПЛАНЕТНЫЙ ПАРУСНИК

О.С. Угольников

? Космический аппарат вывели на круговую околосолнечную орбиту с радиусом 1 а.е. После этого на нем был развернут солнечный парус, постоянно обращенный к Солнцу и уменьшающий эффективную силу его притяжения на 4%. В ходе дальнейшего движения этот парус мгновенно сворачивался, как только аппарат достигал афелия своей текущей орбиты, но вновь раскрывался в каждом перигелии. Сколько целых оборотов вокруг Солнца сделает этот аппарат? Какова его дальнейшая судьба? Взаимодействием аппарата со всеми телами, кроме Солнца и его фотонов, пренебречь.

! Как известно, сила фотонного давления на солнечный парус, как и сила притяжения Солнца, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Поэтому отношение двух сил при постоянной ориентации паруса к Солнцу будет постоянно, и эффективная сила притяжения при раскрытом парусе будет всегда составлять 24/25 от истинной силы притяжения Солнца.

Пусть после n оборотов, на каждом из которых парус сначала разворачивался в перигелии, а затем сворачивался в афелии, аппарат движется по орбите с большой полуосью a_n и эксцентриситетом e_n (до первого раскрытия паруса $a_0=1$ а.е. и $e_0=0$). В точке перигелия расстояние аппарата от Солнца и его скорость составят

$$r_n = a_n (1 - e_n);$$

Теоретический тур – 11 класс

$$V_n = \sqrt{\frac{GM}{a_n} \cdot \frac{1+e_n}{1-e_n}} = \sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1+e_n)}.$$

В данной точке аппарат раскрывает парус, и его дальнейшее движение будет таким же, как оно было бы в поле тяжести звезды с массой $24M/25$ (M – масса Солнца). Очевидно, что данная точка будет перигелием и этой орбиты. Для новых параметров орбиты A_{n+1} и E_{n+1} справедливы соотношения:

$$r_n = A_{n+1} (1 - E_{n+1});$$

$$V_n = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1+E_{n+1}}{1-E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25r_n} \cdot (1+E_{n+1})}.$$

Сопоставляя все формулы, мы получаем:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 + E_{n+1}) = 1 + e_n; \quad E_{n+1} = \frac{25e_n + 1}{24}.$$

По новой траектории аппарату предстоит сделать половину оборота. Когда он достигнет афелия, его расстояние от Солнца и скорость будут равны:

$$R_{n+1} = A_{n+1} (1 + E_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1-E_{n+1}}{1+E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25R_{n+1}} \cdot (1-E_{n+1})}.$$

В афелии парус сворачивается, и аппарат оказывается в обычном поле тяжести Солнца на орбите с большой полуосью a_{n+1} и эксцентриситетом e_{n+1} . Для них справедливы соотношения:

$$R_{n+1} = a_{n+1}(1+e_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{GM}{a_{n+1}} \cdot \frac{1-e_{n+1}}{1+e_{n+1}}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{n+1}} \cdot (1-e_{n+1})}.$$

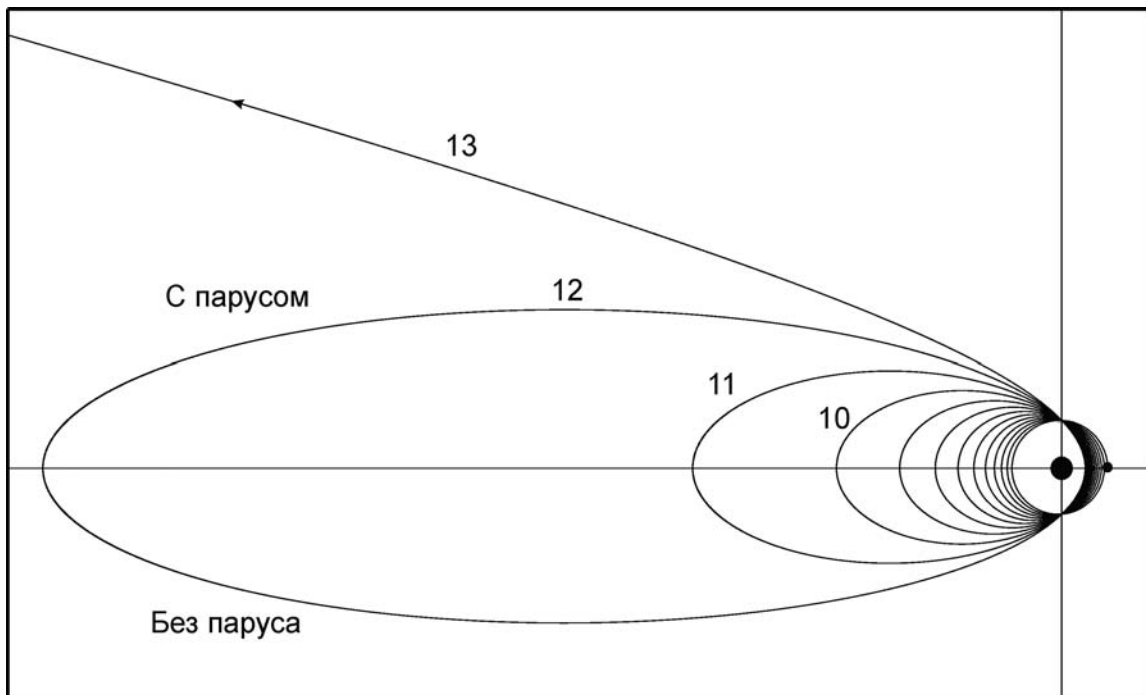
Отсюда мы можем получить:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 - E_{n+1}) = 1 - e_{n+1}; \quad e_{n+1} = \frac{24E_{n+1} + 1}{25} = \frac{25e_n + 2}{25} = e_n + \frac{2}{25} = e_n + 0.08.$$

Приращение эксцентриситета постоянно и не зависит от номера витка. С учетом $e_0=0$, для траектории без паруса на витке n мы имеем: $e_n=2n/25$. Для витка с раскрытым парусом

$$E_n = \frac{25e_{n-1} + 1}{24} = \frac{2n-1}{24}.$$

Аппарат сделает 12 полных оборотов вокруг Солнца с периодически раскрывающимся парусом. 13-й виток уже не будет замкнутым, так как представит из себя гиперболу с эксцентриситетом $E_{13}=25/24 \sim 1.04$. Раскрыв парус в 13-й раз, аппарат покинет Солнечную систему.



В задаче можно учитывать эффект Пойнтинга-Робертсона, связанный с тормозящим ускорением от боковых фотонов на движущийся аппарат. Однако он будет очень мал, и уменьшение эксцентриситета на 13-м витке составит примерно 0.0002. Траектория все равно будет гиперболической.

Нужно также отметить, что с каждым новым витком у аппарата будет уменьшаться перигелийное расстояние. Однако, это не создаст проблем для его работы, так как расстояние в перигелии останется значительно больше радиуса Солнца. Чтобы доказать это, рассмотрим моменты перед раскрытием паруса в перигелии на i -том витке и запишем формулировку закона сохранения момента импульса (который, безусловно, выполняется для аппарата, так как сила фотонного давления центральная и не создает вращательного момента):

$$mV_i r_i = mV_0 a_0;$$

$$\sqrt{\frac{GM}{r_i}} (1 + e_i) \cdot r_i = \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \cdot a_0.$$

Здесь m – масса аппарата. Отсюда можно записать выражение для перигелийного расстояния:

$$r_i = \frac{a_0}{1 + e_i}.$$

На всех участках витков со свернутым парусом эксцентриситет не превышает единицу, и перигелийные расстояния будут не меньше 0.5 а.е, то есть аппарат будет всегда дальше от Солнца, чем Меркурий.

Описанный маневр является возможным средством разгона тел с фотонными парусами в поле тяжести звезд. Его суть в чем-то аналогична взмаху крыла птицы и состоит в том, что парус раскрыт, когда аппарат удаляется от Солнца. Тем самым, фотоны сообщают ему ускорение по ходу движения и совершают положительную работу. На другой половине витка парус сворачивается, и фотоны не оказывают тормозящее действие.

XI. 5 ТАЙМИНГ ПУЛЬСАРА

Е.Н. Фадеев

? Радиопульсар в некоторый момент времени имеет точно известный период ровно в 1 с. Сколько после этого потребуется времени, чтобы обнаружить, что период этого радиопульсара растет со скоростью 10^{-15} ? Методы наблюдения позволяют определять время прихода импульса с точностью 10^{-3} с. Считать пульсар неподвижным относительно наблюдателя.

! Радиопульсар – это вращающаяся нейтронная звезда, излучающая по принципу маяка: один раз за оборот луч, в котором распространяется излучение, попадает на Землю. Энергия вращения постепенно расходуется на излучение, вследствие чего вращение пульсара постепенно замедляется.

На первый взгляд кажется, что правильный ответ можно найти, разделив величину измеряемой задержки сигнала (10^{-3} секунды) на скорость роста периода пульсара (10^{-15}). Получается 10^{12} секунд, что составляет почти 32 тыс. лет. Но это промежуток, за который сам период увеличивается на 10^{-3} секунды. Через такое время рост периода можно будет заметить, зарегистрировав всего два соседних импульса. В случае систематических наблюдений убедиться в замедлении пульсара можно будет существенно раньше.

Пусть P_0 – период радиопульсара в начальный момент времени, ω_0 – угловая скорость вращения пульсара в момент открытия, $\dot{\omega}$ и \dot{P} – скорость изменения периода и угловое ускорение соответственно, φ – угол поворота радиопульсара. Для этого угла можно записать уравнение:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\dot{\omega} t^2}{2}.$$

Поскольку мы считаем пульсар неподвижным относительно наблюдателя, разности времен испускания и получения двух импульсов равны. Поделив обе части уравнения на 2π , мы получим его аналог, в котором вместо угла φ будет стоять число оборотов k , а вместо угловой скорости ω и скорости ее изменения – частота ν и скорость ее изменения:

$$k = \nu_0 t + \frac{\dot{\nu} t^2}{2}.$$

Нам интересны моменты времени, соответствующие полным оборотам и целым значениям k . Пусть k – число оборотов вокруг своей оси, совершенных пульсаром начиная с момента, которому соответствует угловая скорость ω_0 . Тогда для определения времени прихода k -го импульса надо решить квадратное уравнение

$$t^2 + 2t \frac{\nu_0}{\dot{\nu}} - 2 \frac{k}{\dot{\nu}} = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$t_{k1,2} = -\frac{v_0}{\dot{v}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}}.$$

Решение со знаком “–” отрицательно, и мы его не рассматриваем. Если бы пульсар не замедлялся, то время прихода k -го импульса определялось бы как

$$t_{k0} = \frac{k}{v_0}.$$

В итоге, временная задержка прихода k -го импульса составит:

$$\Delta t_k = t_{k1} - t_{k0} = -\frac{v_0}{\dot{v}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}} - \frac{k}{v_0}.$$

Это уравнение можно путем несложных преобразований свести к квадратному относительно k :

$$k^2 + 2v_0\Delta t_k \cdot k + (v_0\Delta t_k)^2 + 2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$k = -v_0\Delta t_k \pm \sqrt{-2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k}.$$

Знак “–” под корнем не должен смущать, поскольку пульсар тормозится, и величина \dot{v} отрицательна. Второе решение вновь не имеет физического смысла, поэтому мы его рассматривать не будем. Переходя от частот к периодам с учетом $P_0 = v_0^{-1}$, имеем:

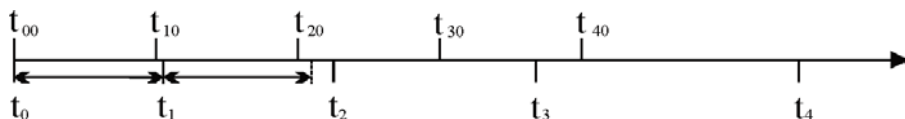
$$\dot{P} = \frac{P_1 - P_0}{\Delta t_1} = \frac{v_1^{-1} - v_0^{-1}}{\Delta t_1} = \frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1 \Delta t_1} \approx -\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1}{v_0^2} = -\frac{\dot{v}}{v_0^2}.$$

Для заданной величины временной задержки Δt_k получаем число k :

$$k = -\frac{\Delta t_k}{P_0} + \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} \approx \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} = 1.4 \cdot 10^6.$$

Таким образом, обнаружить изменение периода пульсара можно через $1.4 \cdot 10^6$ импульсов, что составляет немногим более 16 дней.

Эту задачу можно решить и другими способами. Рассмотрим, например, как меняются моменты прихода импульсов из-за увеличения периода. Каждый раз новый импульс приходит чуть позже, чем ему следовало бы в случае постоянного периода. Вклад в разницу вносит задержка импульса не только в течение последнего периода, но и всего времени, накопленного в ходе наблюдений начиная с момента t_0 . Именно поэтому мы замечаем изменение периода гораздо раньше, чем период сам изменится на требуемую величину.



Пусть, как и раньше, t_k обозначает время прихода k -го импульса. Будем считать $t_0=0$. Тогда первый импульс придет в момент времени

$$t_1 = P_0 + \Delta P_1,$$

второй импульс – в момент

$$t_2 = t_1 + (t_1 + \Delta P_2) = 2P_0 + 2\Delta P_1 + \Delta P_2,$$

третий импульс – в момент

$$t_3 = t_2 + (t_2 + \Delta P_3) = 3P_0 + 3\Delta P_1 + 2\Delta P_2 + \Delta P_3$$

и так далее. Величины ΔP_k – это разницы периодов в моменты t_k и t_{k-1} . Строго говоря, они различны, но, в силу ничтожности различия в периодах в моменты приходов соседних импульсов, их можно считать равными. Тогда формула для момента прихода k -го импульса упрощается:

$$t_k = kP_0 + \Delta P \sum_{n=1}^k n = kP_0 + \frac{k+1}{2} k \Delta P \approx kP_0 + \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задержка момента прихода есть

$$\Delta t_k = t_k - kP_0 = \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задав требуемую задержку, получаем величину k :

$$k = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{\Delta P}} = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}},$$

что совпадает с полученным ранее соотношением.

XI. 6 ХОЛОДНОЕ ОБЛАКО

Н.Н. Шахворостова

? Межзвездное облако состоит из молекулярного водорода (H_2) и пыли и имеет форму шара с однородным внутренним распределением массы. Блеск далеких звезд, расположенных за центром облака, ослаблен на 1^m . При каком радиусе это облако начнет сжиматься под действием собственного тяготения, если его температура составляет 20К? Массовое соотношение газа и пыли в облаке постоянно и равно 100:1, черные пылинки имеют радиус 0.5 мкм, плотность 1 г/см³ и ослабляют свет по законам геометрической оптики.

! Основу массы облака составляет газ, прозрачный для излучения. Ослабление света происходит на пылевых частицах. Пусть J_0 и J – величины потока излучения, входящего в облако и выходящего из него. Если облако только поглощает излучение и не излучает само, то эти величины связаны уравнением

$$J = J_0 e^{-\tau},$$

XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

где τ – оптическая толщина облака, которую можно трактовать как число частиц на пути луча света. Из закона Погсона известно, что

$$J = J_0 10^{0.4(m_0 - m)}.$$

Сравнивая эти выражения и принимая во внимание, что блеск звезд за облаком ослаблен на 1^m , получаем, что среднее число частиц на пути света равно

$$\tau = \ln 2.512 \sim 1.$$

Обозначив радиус пылинок как r , а радиус облака через R , записываем выражение

$$2R n \pi r^2 = \tau.$$

Здесь n – концентрация пылевых частиц. Отсюда мы выражаем массовую плотность пыли в облаке ρ_D и полную плотность ρ :

$$\rho_D = n \cdot \frac{4}{3} \rho_0 \pi r^3; \quad \rho = K \rho_D = \frac{2K\tau\rho_0 r}{3R}.$$

Здесь ρ_0 – плотность одной пылинки, K – соотношение массы газа и пыли в облаке (учитываем, что оно значительно больше единицы). Запишем формулу для круговой (первой космической) скорости на краю облака:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \cdot R = \sqrt{\frac{8\pi GK\tau\rho_0 r R}{9}}.$$

Коэффициент $8/9$ близок к единице, и в дальнейших расчетах мы его опускаем. Облако перестанет быть устойчивым и начнет сжиматься, если характерные скорости частиц (молекул газа) станут меньше первой космической скорости. Среднеквадратичная скорость частицы равна

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\mathfrak{R}T}{\mu}}.$$

Здесь m – масса молекулы водорода, μ – молярная масса, k – постоянная Больцмана, \mathfrak{R} – универсальная газовая постоянная, T – температура. Отсюда получаем выражение для радиуса:

$$R \geq \frac{3\mathfrak{R}T}{\pi G\mu K\tau\rho_0 r} \approx \frac{\mathfrak{R}T}{G\mu K\tau\rho_0 r} = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ м} \approx 0.8 \text{ пк}$$



ПРАКТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



IX. 1

НОЧНОЕ НЕБО

Е.Н. Фадеев

? Вам предоставлена фотография звездного неба вблизи северного полюса мира (последняя страница обложки, автор – Александр Павлов), а также таблица с экваториальными координатами некоторых звезд. Определите время экспозиции и масштаб фотографии (в °/см).

Звезда	Прямое восхождение	Склонение	Звезда	Прямое восхождение	Склонение
β Cas	00 ^h 09.2 ^m	+59°09'	γ UMa	11 ^h 53.8 ^m	+53°42'
α Cas	00 ^h 40.5 ^m	+56°32'	δ UMa	12 ^h 15.4 ^m	+57°02'
γ Cas	00 ^h 56.7 ^m	+60°43'	ϵ UMa	12 ^h 54.0 ^m	+55°56'
δ Cas	01 ^h 25.9 ^m	+60°14'	α CVn	12 ^h 56.0 ^m	+38°19'
ϵ Cas	01 ^h 54.4 ^m	+63°40'	ζ UMa	13 ^h 23.9 ^m	+54°56'
α UMi	02 ^h 31.8 ^m	+89°16'	η UMa	13 ^h 47.5 ^m	+49°19'
β Per	03 ^h 08.2 ^m	+40°57'	β UMi	14 ^h 50.7 ^m	+74°09'
α Per	03 ^h 24.3 ^m	+49°52'	γ UMi	15 ^h 20.7 ^m	+71°50'
α Tau	04 ^h 35.9 ^m	+16°31'	β Cyg	19 ^h 30.7 ^m	+27°58'
β Ori	05 ^h 14.5 ^m	-08°12'	δ Cyg	19 ^h 45.0 ^m	+45°08'
γ Ori	05 ^h 25.1 ^m	+06°21'	γ Cyg	20 ^h 22.2 ^m	+40°15'
δ Ori	05 ^h 32.0 ^m	-00°18'	α Cyg	20 ^h 41.4 ^m	+45°17'
ϵ Ori	05 ^h 36.2 ^m	-01°12'	ϵ Cyg	20 ^h 46.2 ^m	+33°58'
α Ori	05 ^h 55.2 ^m	+07°24'	α Cep	21 ^h 18.6 ^m	+62°35'
α Gem	07 ^h 34.6 ^m	+31°53'	β Cep	21 ^h 28.7 ^m	+70°34'
β Gem	07 ^h 45.3 ^m	+28°02'	ϵ Cep	22 ^h 15.0 ^m	+57°03'
β UMa	11 ^h 01.8 ^m	+56°23'	δ Cep	22 ^h 29.2 ^m	+58°25'
α UMa	11 ^h 03.7 ^m	+61°46'	γ Cep	23 ^h 39.3 ^m	+77°38'

! Для определения масштаба фотографии необходимо отождествить треки звезд с реальными звездами на небе. Это может показаться затруднительным из-за того, что звезды выглядят не точками, а черточками. Если сразу очертания созвездий не угадываются, то надо соединять начала или концы треков ярких звезд линиями. Тогда легче увидеть контуры знакомых созвездий. Достаточно надежно отождествляются семь звезд Ковша Большой Медведицы, α^2 Гончих псов или пяти звезд Кассиопеи. При некотором навыке можно найти и другие созвездия (Дракон, Цефей, Лебедь).

Если звезды не очень далеки на небесной сфере друг от друга, то расстояние между ними можно вычислить также, как и расстояние между двумя точками на плоскости. Но нужно учесть, что угловое расстояние между кругами склонений

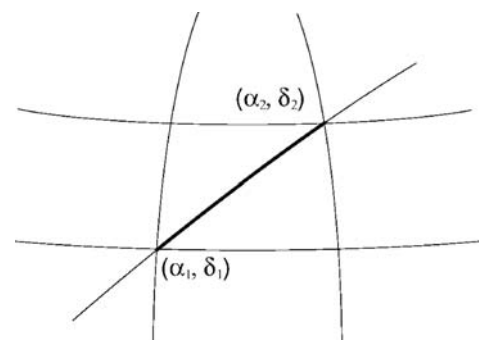


уменьшается как $\cos \delta$ при приближении к полюсу мира. Одной стороной треугольника тогда будет часть круга склонения, а другой стороной – часть суточной параллели звезды. Но дуга суточной параллели со склонением δ_2 будет короче соответствующей дуги суточной параллели со склонением δ_1 . В одном случае мы получим заниженное расстояние между звездами, а в другом, напротив, завышенное. Чтобы получить более точное значение расстояния, можно взять среднее значение склонений звезд. Итого, искомая формула принимает вид

$$l = \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 + \left[(\alpha_2 - \alpha_1) \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \right]^2}.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$ – прямое восхождение и склонение звезд соответственно.

Нужно выбрать несколько пар звезд и сравнить угловые и линейные расстояния между ними. Не следует выбирать очень близкие звезды, поскольку при этом возрастает ошибка измерений, а также очень далекие, поскольку тогда угловое расстояние на небесной сфере нужно будет вычислять с помощью формул сферической тригонометрии. Разумеется, звезды не должны лежать по разные стороны от полюса мира. Также не следует использовать далеко расположенные звезды на краю кадра, поскольку там максимальна дисторсия камеры. Наиболее удачные пары – те, у которых близки какие-либо координаты: склонение или прямое восхождение.



В некотором приближении в качестве такой звездной пары можно взять Полярную звезду и какую-либо другую звезду в кадре. Считая, что Полярная звезда находится в полюсе мира, мы получаем величину углового расстояния:

$$\lambda = 90^\circ - \delta,$$

где δ – склонение второй звезды в паре. Чтобы точность измерения масштаба была выше и меньше зависела от удаления Полярной звезды от северного полюса мира, нужно взять вторую звезду, далекую от северного полюса мира.

Сделав несколько измерений и усреднив полученное значение, мы получим масштаб изображения M , примерно равный $8.5^\circ/\text{см}$ (при размере фотографии 15.1 см). Для достижения большей точности необходимо делать несколько измерений. Определяемый таким образом масштаб на этой фотографии немного варьируется от одной пары звезд к другой. Это следствие кривизны поля, всегда присутствующей на широкоугольных снимках.

Есть несколько способов определения времени экспозиции. В простейшем случае, надо выбрать трек какой-либо произвольной звезды, и посчитать размер угла, опирающегося на концы этого трека с вершиной в Полярной звезде. Этот угол равен примерно 12° . Значит, за время экспозиции звезда прошла $12/360 = 1/30$ часть своего суточного пути. Экспозиция длилась 0.8 часа или 48 минут. Разумеется, измерений должно быть несколько, с последующим усреднением результата.

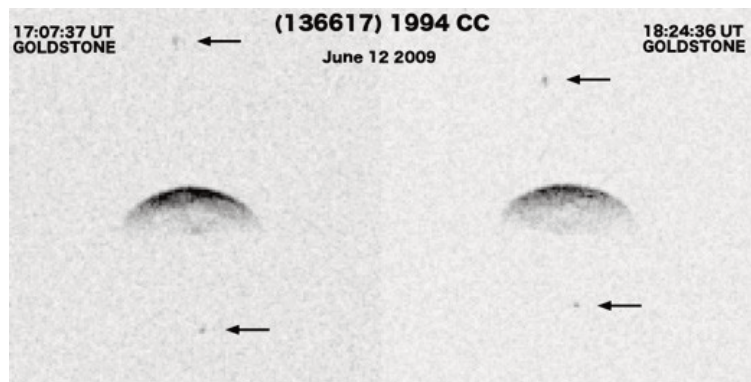
Можно также измерить длину трека какой-либо отождествленной звезды. Пусть она равна X . Тогда угловая дуга трека равна MX . Это смещение соответствует изменению часового угла (то есть времени экспозиции) звезды на $MX/\cos \delta$, где δ – склонение звезды.

IX. 2

СПУТНИК АСТЕРОИДА

А.Н. Акинъщиков

? Вам представлены два изображения астероида 136617 (1994 CC) во время его пролета вблизи Земли (негатив). Указаны дата и всемирное время съемки. На снимках видны два спутника. Известно, что второй спутник (снизу на фото) движется по круговой орбите с радиусом в 5 радиусов астероида и за указанный на фото временной интервал совершил малую часть одного оборота. Считая форму астероида сферической, оцените его среднюю плотность. Угловым перемещением самого астероида за время наблюдений пренебречь.



! Определим величину смещения нижнего спутника на фотографиях в единицах радиуса астероида:

$$d \sim R/3.$$

Во время наблюдений спутник располагается на небе вблизи астероида (а в пространстве, вероятнее всего, перед ним), его

элонгация существенно меньше максимальной. При этом видимое движение происходит фактически в направлении к центру астероида. Поэтому мы можем считать тангенциальную скорость равной орбитальной скорости спутника:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

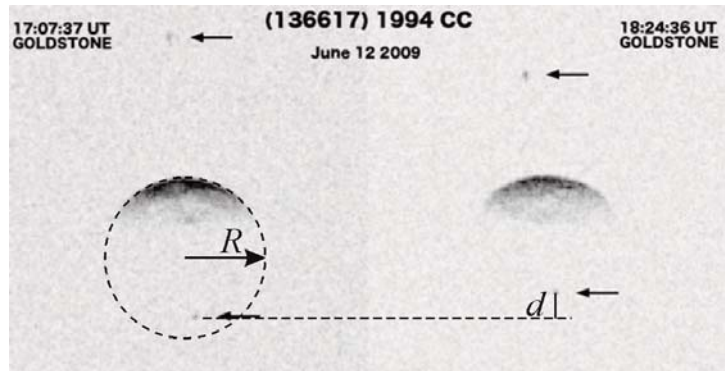
Здесь a – радиус орбиты спутника. Обозначим интервал между двумя моментами съемки (4619 секунд) как t . Тогда

$$d = v \cdot t = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot t = \sqrt{\frac{4\pi G \rho R^3}{3a}} \cdot t.$$

Здесь ρ – средняя плотность астероида. Отсюда мы можем получить выражение для нее:

$$\rho = \frac{3ad^2}{4\pi GR^3 t^2} = \frac{3}{4\pi G t^2} \left(\frac{a}{R}\right) \cdot \left(\frac{d}{R}\right)^2.$$

Зная отношение $(a/R)=5$ из условия задачи и $(d/R)=1/3$ из сравнения фотографий, получаем значение плотности: около 100 кг/м^3 . Отметим, что такое невысокое значение плотности, более характерное для кометных ядер, связано с предположением о сферичности астероида и вероятным завышением его размеров.



IX. 3 МНОГОЛИКАЯ ЛУНА

О.С. Угольников

? Вам предложены несколько изображений Луны, сделанных с Земли (последняя страница обложки). Определите, на каких из них происходит лунное затмение (в полутеневой или теневой фазе), а на каких затмения нет. Обоснуйте свои ответы.

! Чтобы отобрать те изображения, на которых Луна находится в затмении, выделим основные оптические свойства затмившейся Луны:

1) Красный цвет теневой части, хорошо заметный в полной теневой фазе, с белой каймой во внешней части тени. При этом Луна может иметь желто-красный цвет и вне затмения, если она находится низко над горизонтом;

2) Нерезкие, размытые края тени в частной фазе, в контрасте с резким терми-

натором обычной Луны в неполной фазе с четко заметными особенностями рельефа.

3) Граница имеет форму дуги круга, в отличие от «обычного» терминатора, имеющего форму половины эллипса, проходящего через полюса Луны.

4) Луна может попасть в тень или полутень только в полнолунии вблизи узла своей орбиты, то есть, не имея ощутимой либрации по широте.

Теперь разберем каждое из девяти изображений Луны на рисунке:

1. Луна полная, лимб нигде не содержит резких форм, связанных с рельефом. При этом слева виден край тени, имеющий круглую форму. Луна находится в полутеневом или частном теновом затмении с малой фазой.

2. Край света и тени нерезкий, не отображает рельефа и имеет форму дуги круга, не проходящего через полюса Луны. Это частное теновое затмение.

3. Серп Луны с резким терминатором, проходящим через полюса. На фото обычная растущая Луна, окрашенная в желтый цвет из-за атмосферных условий или эффектов фотосъемки.

4. Данный случай является наиболее сложным из всех представленных. Левая часть диска Луны ослаблена, но профиль не имеет круглой формы. Это потемнение может быть следствием наличия поглощения света в атмосфере или в оптической схеме фотокамеры. Главный признак того, что затмения на этой фотографии нет – ощутимая южная либрация Луны по широте. Это видно по сравнению с фото 1, а также по наличию изрезанного терминатора с формами рельефа у южного края. Такой полная Луна бывает при значительном удалении к северу от эклиптики. Затмение в таких условиях наступить не может.

5. Луна имеет ярко-оранжевый цвет, который может наступить при полном затмении. Однако в данном случае Луна располагается очень низко над горизонтом. На это указывает как далекий профиль земных гор, так и сильное сжатие лунного диска за счет явления рефракции. Луна в полном затмении (точно в противостоянии Солнцу) наблюдалась бы у горизонта на фоне сумеречного неба, и не была бы столь отчетливой (а скорее всего, была бы совершенно невидимой). Более того, Луна окрашена в оранжевый цвет однородно, чего не характерно для тени Земли. Затмения на данном фото нет, а покраснение Луны – следствие ее низкого положения над горизонтом и влияния земной атмосферы. У Луны на этом фото также заметна южная либрация по широте.

6. Луна вновь занимает невысокое положение над горизонтом (над крышей дома). При этом небо светлое, а граница света и тени на Луне не проходит через полюса (освещена южная часть диска Луны, как видно по форме морей). На этом фоне запечатлена Луна в частной фазе тенового затмения.

7. На этом фото Луна выглядит типично для полного затмения – тень красная с белой каймой с одного края. Обычная полная Луна, окрашенная локальным атмосферным ослаблением света, не могла бы быть такой из-за низкого положения над горизонтом. В этом случае ее диск был бы искажен аналогично фото 5.

8. Луна с терминатором в виде половины эллипса с отчетливо заметным рельефом. Это обычная растущая Луна с пепельным светом, вызванным ее освещением Землей. Затмения на фото нет.

9. Терминатор нерезкий. Хотя он и проходит вблизи полюсов Луны, он имеет форму дуги окружности. На фото – частное затмение Луны.

Итак, лунное затмение запечатлено на фотографиях 1, 2, 6, 7 и 9.



10 класс

X. 1

СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ

А.Н. Акинъщиков

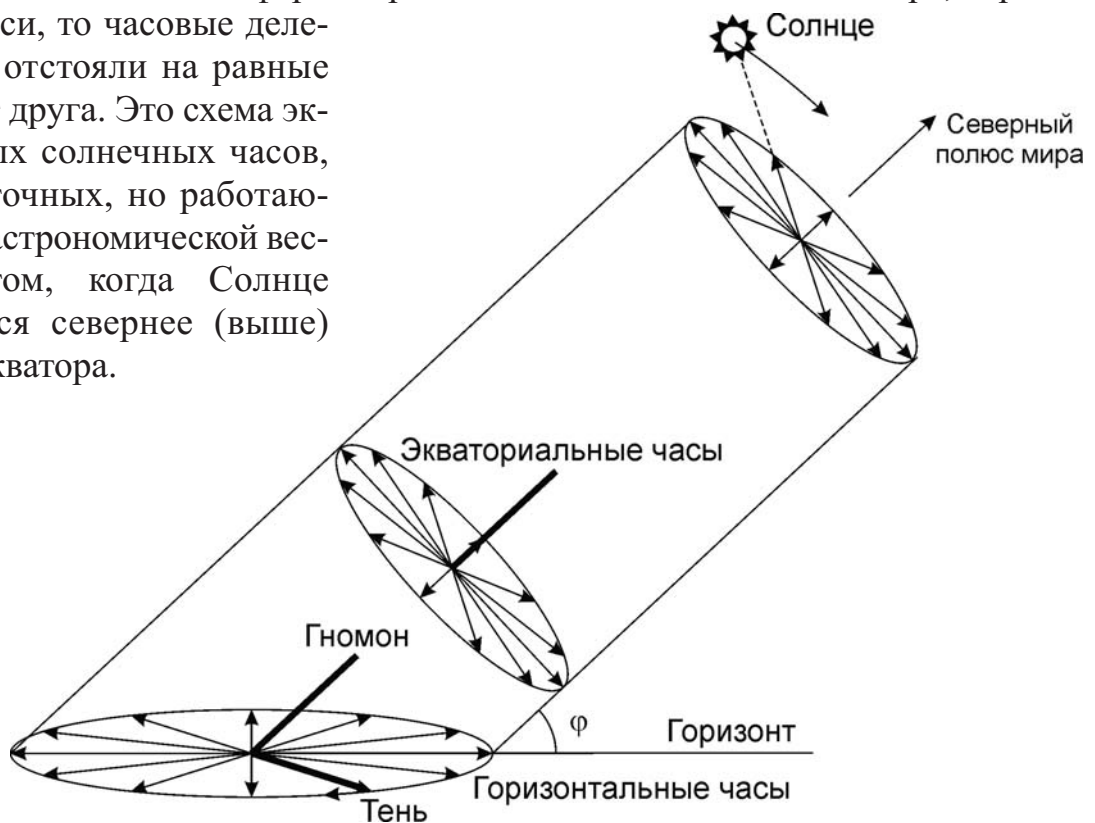
? Во Владивостоке (43° с.ш., 132° в.д.) решили построить большие горизонтальные солнечные часы с неподвижным гномоном, которые показывали бы наиболее точное (по возможности) время днем в ясную погоду в любой сезон года. Нарисуйте, каким должен быть циферблат этих часов по отношению к сторонам горизонта. Время во Владивостоке опережает московское на 7 часов.

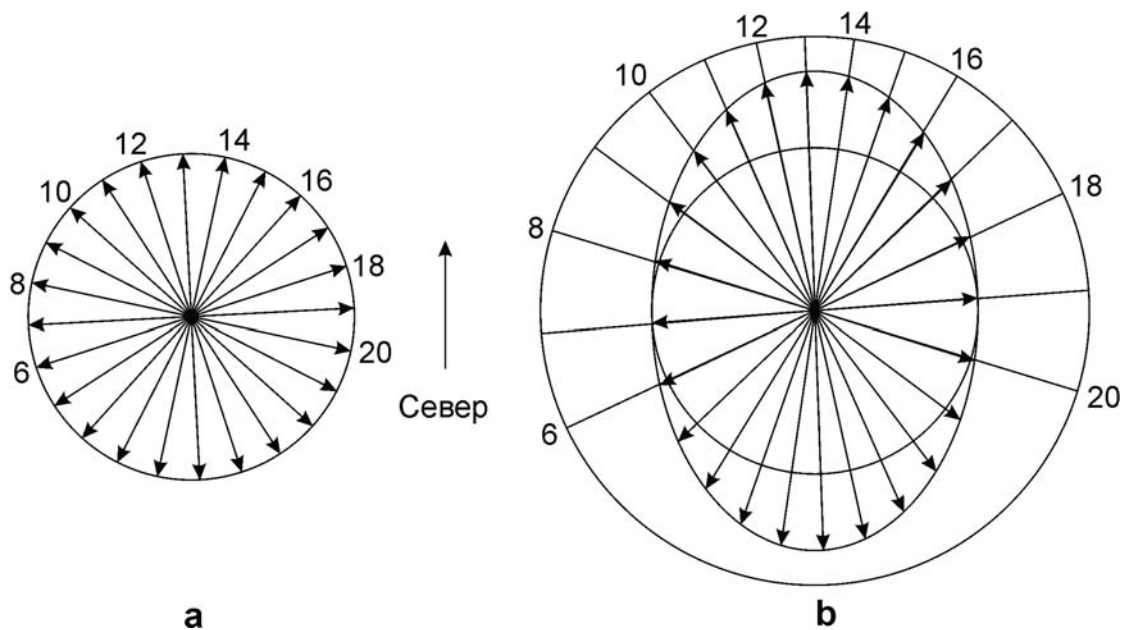
! Для начала вычислим, какое время во Владивостоке будет полуденным. По Всемирному времени это соответствует:

$$UT = 12^{\text{ч}} - \lambda = 03^{\text{ч}}12^{\text{м}}.$$

Время на часах жителей Владивостока есть московское время плюс 7 часов, то есть, Всемирное время плюс 10 часов. В итоге, средний солнечный полдень наступает во Владивостоке в $13^{\text{ч}}12^{\text{м}}$. Мы не учитываем уравнение времени и не вычисляем момент истинного солнечного полудня, так как оно постоянно меняется в пределах $\pm 15-16$ минут, а часы рассчитаны на работу в течение всего года.

Для того, чтобы часы работали более-менее точно в любой сезон, их ось должна быть направлена не в зенит, а в Северный полюс мира. В этом случае Солнце в ходе своего видимого суточного движения будет равномерно вращаться вокруг этой оси. Если бы циферблат располагался в плоскости экватора, перпендикулярно оси, то часовые деления там бы отстояли на равные углы друг от друга. Это схема экваториальных солнечных часов, простых и точных, но работающих только астрономической весной и летом, когда Солнце располагается севернее (выше) небесного экватора.





В случае горизонтальных часов равномерный циферблат экваториальных часов отображается на горизонтальную плоскость (см. рисунок слева). Это приводит к искажению циферблата – растяжению его в направлении "север-юг" в $K=(1/\sin\varphi)$ раз, где φ – широта места. В случае Владивостока (широта 43°) величина K составляет 1.47.

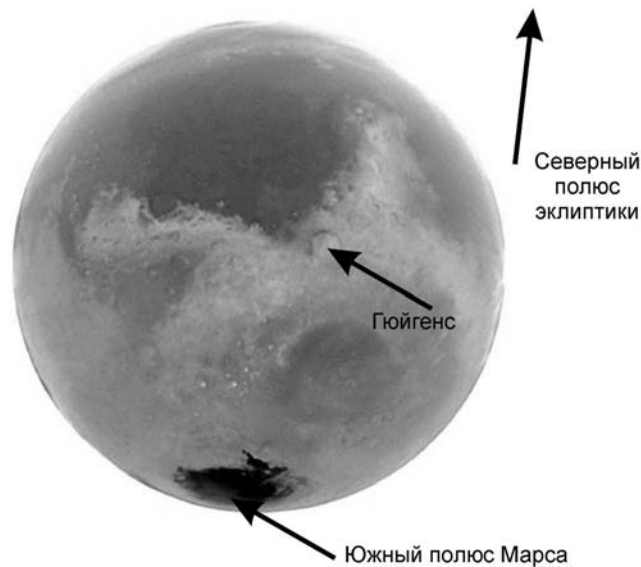
Теперь становится ясной процедура построения циферблата. Вначале изображаем круглый циферблат, у которого направление на север будет на 12 минут (3 градуса) правее деления 13 часов (модель "а" на рисунке сверху). Так мы добиваемся правильного отображения полудня для Владивостока.

Далее мы растягиваем этот циферблат в 1.47 раз в направлении "север-юг". Полученный эллиптический циферблат уже можно использовать в горизонтальных часах во Владивостоке. При желании его можно сделать также круглым, продолжая отрезки, соответствующие определенным делениям часов, до пересечения с окружностью нужного радиуса (модель "b" на рисунке). Однако, шкала на этом круге уже не будет равномерной. Деления, соответствующие ночи для любого сезона во Владивостоке, наносить нет смысла, так как ночью солнечные часы работать не могут.

Х. 2 МАРСИАНСКИЙ ЛОКАТОР

О.С. Угольников

? Ученые создали супер-мощную лазерную установку для локации поверхности Марса непосредственно с южного полюса Земли. Отметьте на рисунке (на обороте, негатив) точку, в которую нужно направить лазерный луч, чтобы изучить область кратера Гюйгенс. Марс находится в великом противостоянии с Землей, на рисунке указаны южный полюс Марса и направление на северный полюс эклиптики в момент проведения эксперимента. Наклоном орбиты Марса к эклиптике пренебречь. Считать луч лазера очень узким, атмосферные помехи не учитывать. Орбиту Земли считать круговой.



! В момент великого противостояния Марс повернут к Земле своим дневным полушарием, причем к Солнцу и Земле обращен южный полюс планеты. Проведем диаметр через южный полюс Марса и центр его видимого диска. Обратим внимание, что эта линия оказывается параллельной направлению на Северный полюс эклиптики.

Кратер Гюйгенс располагается правее и немного выше середины диска Марса. С учетом того, что Марс обращен к Земле южным полюсом, можем сделать вывод, что Гюйгенс располагается вблизи экватора Марса. Он также расположен недалеко от полуденной линии, и в момент эксперимента за счет осевого движения Марса будет двигаться практически перпендикулярно этой линии слева направо. Скорость этого движения будет равна

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 240 \text{ м/с.}$$

Осевое вращение самой Земли на картину не влияет, так как локатор находится на южном полюсе Земли. Кроме этого, Марс движется в пространстве относительно Земли. В противостоянии это движение попятное и на рисунке оно тоже будет направлено слева направо. Так как мы пренебрегаем наклоном орбиты Марса к эклиптике, то это движение будет происходить перпендикулярно направлению на Северный полюс эклиптики, то есть вдоль той же самой линии, что и движение кратера Гюйгенс за счет осевого вращения Марса. Скорость этого движения есть разность орбитальных скоростей Земли и Марса. Учтем, что Марс находится в великом противостоянии, то есть в перигелии своей орбиты:

$$V = u_E - u_M = \sqrt{\frac{GM}{a_E}} - \sqrt{\frac{GM}{a_M} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = u_E \left(1 - \sqrt{\frac{a_E}{a_M} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \right) = 3.3 \text{ км/с.}$$

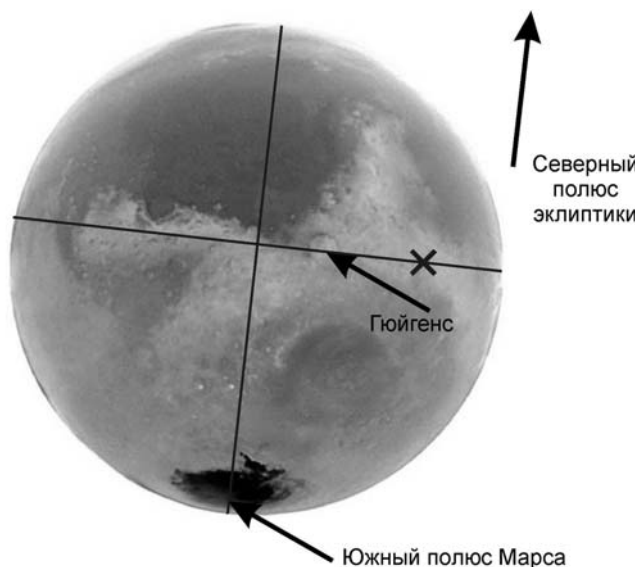
Здесь u_E и u_M – орбитальные скорости Земли и Марса, a_E и a_M – большие полуоси орбит этих планет, e – эксцентриситет орбиты Марса, M – масса Солнца. Полученная скорость значительно больше, и именно орбитальное движение планет внесет основную поправку в смещение Марса за период локации. Определим время, за которое лазерный луч достигнет Марса:

$$\tau = \frac{a_M(1-e) - a_E}{c} = 190 \text{ сек.}$$

За это время кратер Гюйгенс сместится вправо на расстояние

$$L = (V + v) \tau = 670 \text{ км}$$

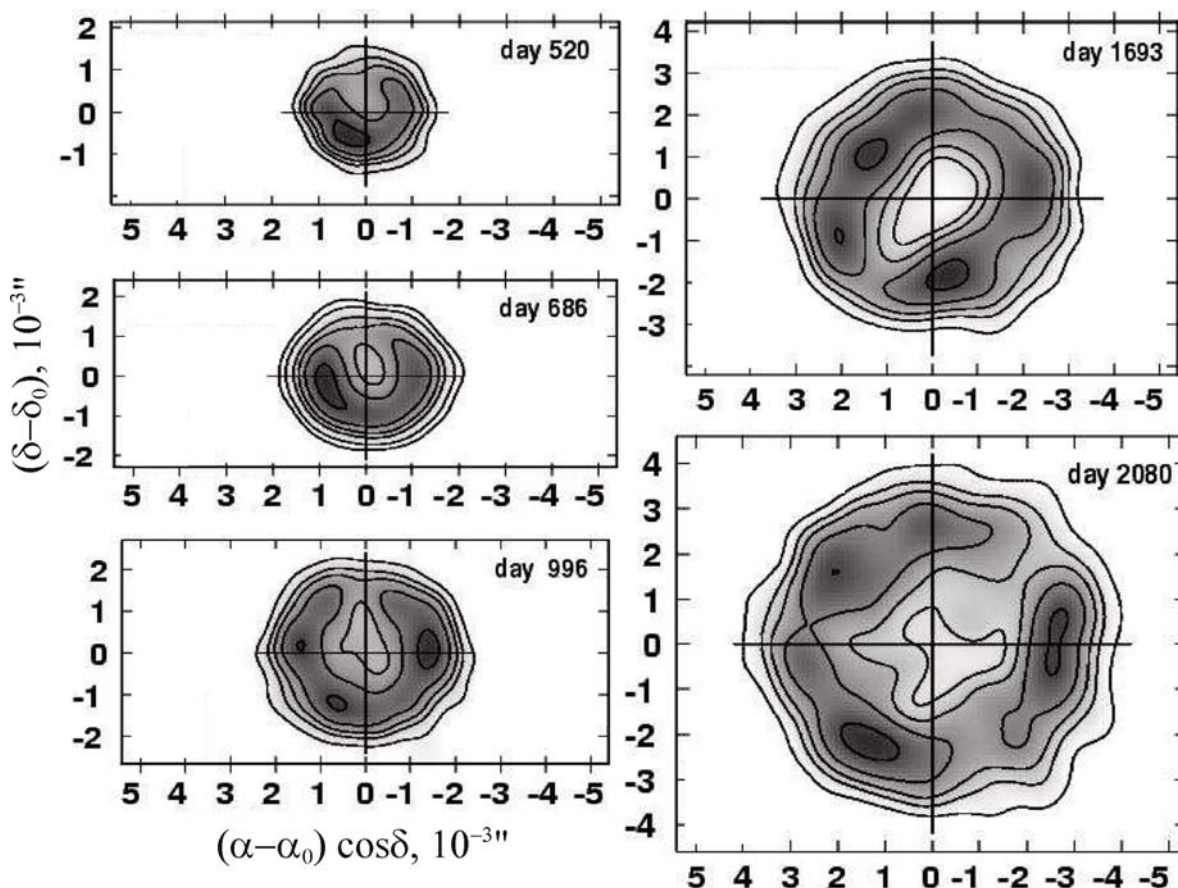
или 0.2 радиуса Марса. Учтем, что свет от Марса до Земли идет то же время, и в момент наблюдений он сам сместится на то же расстояние. В итоге, точка, в которую должен быть направлен лазерный импульс, смещена на расстояние $2L$ и помечена на рисунке крестиком.



Х. 3 СВЕРХНОВАЯ В БЛИЗКОЙ ГАЛАКТИКЕ

Е.Н. Фадеев

? В некоторой галактике вспыхнула сверхновая звезда. В таблице (на обороте) вам даны значения лучевых скоростей, соответствующие краям линии H_α (6563 \AA) в спектре сверхновой. На рисунках даны радиокарты оболочки сверхновой (единицы – миллисекунды дуги). Считая расширение оболочки сферически симметричным, определите расстояние до галактики.



XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Дни после вспышки	Фиолетовое смещение, км/с	Красное смещение, км/с
553	-10700	10500
670	-10500	10500
976	-10200	9600
1766	-9600	9300
2028	-9000	7600

Поскольку сверхновая вспыхнула в некоторой галактике, расстояние до нее равно расстоянию до галактики. Раз нам известно фиолетовое или красное смещение остатка фрагментов остатка сверхновой, мы можем определить лучевую скорость, с которой данный фрагмент остатка летит на нас или от нас. Из таблицы видно, что фиолетовое смещение всегда больше, чем красное. Это следствие того, что сверхновая как целое приближается к нам. Поскольку оболочка сохранила свою симметричность, будем считать, что во все стороны она расширяется одинаково.

Вычислим для каждого указанного дня значение скорости разлета оболочки, а также значение скорости самой оболочки.

Дни после вспышки	Скорость оболочки, км/с	Скорость расширения оболочки, км/с	Угловой размер оболочки, $10^{-3}''$	Скорость расширения, $10^{-6}''/\text{день}$
520			1.5	—
553	-100	10600		
670	0	10500		
686			2	3.0
976	-300	9900		
996			2.3	0.97
1693			3	1.0
1766	-150	9450		
2028	-700	8300		
2080			4	2.5

Как мы можем заметить, скорость оболочки сильно меняется, хотя естественно ожидать, что она меняться не должна. Точно так же, измерив размеры оболочки, мы получаем разные скорости ее расширения. Все это связано с большой погрешностью измерений как лучевых скоростей, так и размеров оболочки.

Расширение в картинной плоскости будет происходить с той же скоростью $v_t = v_r = v$. За время t оболочка расширится на vt , а ее угловой размер увеличится на $\Delta\theta = \mu t$, где μ – угловая скорость расширения оболочки. Мы можем определить среднюю угловую скорость расширения оболочки на промежутке от 520 до 2080 дня. Она составит $1.6 \cdot 10^{-6}$ угловых секунд в день ($7.8 \cdot 10^{-12}$ радиан в день или $9.0 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}$).

Осталось найти расстояние до центра оболочки D . Поскольку величины θ и $\Delta\theta$ экстремально малы, то:

$$x + vt = D \operatorname{tg}(\theta + \mu t) = D(\theta + \mu t).$$

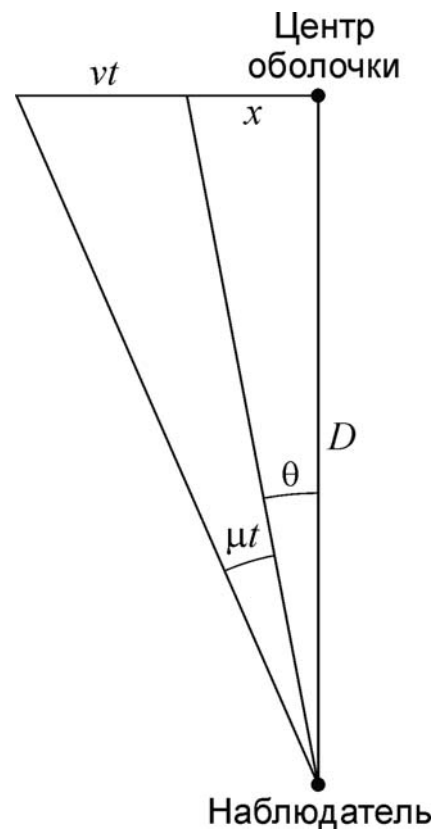
Для начального момента исследуемого интервала (553 день) $x = D\theta$. Вычитая это равенство из предыдущей формулы, имеем:

$$vt = D\mu t.$$

Средняя пространственная скорость расширения оболочки v равна 9750 км/с. Из этого имеем

$$D = \frac{v}{\mu} = 1.1 \cdot 10^{20} \text{ км} = 3.5 \text{ Мпк}.$$

Приведенные данные относятся к Сверхновой $SN1993J$ в галактике M81.



XI. 1 ВЕСЕННИЕ РАССВЕТЫ

О.С. Угольников

? В таблице (на обороте) приведены измеренные моменты восхода верхнего края Солнца (среднее солнечное время) в течение 21 дня в марте в пункте с широтой $+60^\circ$ на уровне моря. Указаны значения температуры и атмосферного давления в этот момент. Для моментов восхода также даются значения склонения центра Солнца и уравнения времени. Исходя из этого, получите эмпирическое выражение для величины атмосферной рефракции у горизонта в зависимости от температуры и давления. Угловой радиус Солнца считать постоянным ($16'05''$).

! Для того, чтобы получить требуемую формулу, нужно получить значения атмосферной рефракции у горизонта хотя бы в некоторые дни при разных давлениях и температурах. В таблице приведены моменты восхода верхнего края Солнца над горизонтом. В это время истинная высота центра Солнца над горизонтом отрицательна и составляет

$$h = -r - \rho.$$

XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

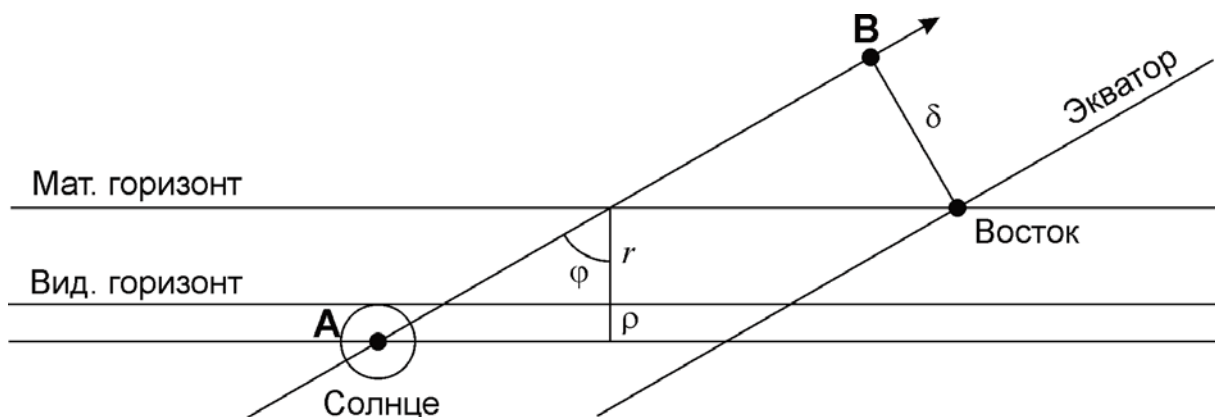
Дата		T	P	Склонение Солнца			Уравнение времени		Момент восхода				
		°С	мм.рт.ст.	°	'	"	м	с	ч	м	с		
Март	8	-28	749	-	05	00	28	+	10	55	06	36	52
	9	-21	754	-	04	37	06	+	10	40	06	34	16
	10	-24	747	-	04	13	40	+	10	25	06	31	10
	11	-27	746	-	03	50	12	+	10	10	06	28	01
	12	-20	741	-	03	26	41	+	09	54	06	25	29
	13	-20	734	-	03	03	07	+	09	38	06	22	32
	14	-12	730	-	02	39	31	+	09	21	06	20	01
	15	-6	740	-	02	15	54	+	09	05	06	17	18
	16	-6	748	-	01	52	16	+	08	48	06	14	13
	17	+1	738	-	01	28	36	+	08	32	06	11	41
	18	-6	731	-	01	04	56	+	08	15	06	08	19
	19	-5	733	-	00	41	16	+	07	57	06	05	19
	20	-14	739	-	00	17	35	+	07	39	06	01	43
	21	-10	745	+	00	06	04	+	07	22	05	58	54
	22	-5	746	+	00	29	43	+	07	04	05	56	09
	23	-10	750	+	00	53	21	+	06	46	05	52	47
	24	-8	760	+	01	16	57	+	06	28	05	49	48
	25	-5	770	+	01	40	31	+	06	10	05	46	53
	26	-10	766	+	02	04	04	+	05	52	05	43	34
	27	-18	766	+	02	27	33	+	05	34	05	40	03
	28	-10	766	+	02	51	00	+	05	15	05	37	29

Здесь ρ – угловой радиус Солнца, а r – атмосферная рефракция у горизонта. Часовой угол Солнца τ связан со средним солнечным временем t как

$$\tau = t - (12^h + \eta).$$

Здесь η – уравнение времени, приведенное в таблице. Используя эти два соотношения, можно вычислить истинную высоту центра Солнца в момент видимого восхода его верхнего края с помощью формул сферической тригонометрии. Однако, существует более простой путь. Используем тот факт, что наблюдения проводились вблизи весеннего равноденствия, восход Солнца происходил вблизи точки востока. Изобразим участок неба вблизи этой точки (рисунок снизу).

Если бы Солнце находилось точно на небесном экваторе и не имело угловых размеров, а на Земле не было атмосферы, то восход наблюдался бы в момент $6^h + \eta$. В реальности, верхняя точка солнечного диска с часовым углом -6^h (точка



Практический тур – 11 класс

В на рисунке) не совпадает с видимым горизонтом. Смещение времени момента восхода (отрезок **AB** по модулю), как видно из рисунка, составляет:

$$\Delta t = -\frac{r + \rho}{\cos \varphi} - \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Если склонение Солнца меньше нуля, то величина Δt может быть и положительной (восход Солнца происходит позже $6^{\text{ч}} + \eta$). Отсюда мы получаем приближенное выражение для рефракции:

$$r = -\delta \sin \varphi - \Delta t \cos \varphi - \rho;$$

$$\Delta t = t_{\text{в}} - (6^{\text{ч}} + \eta).$$

Здесь $t_{\text{в}}$ – измеренное время восхода верхнего края Солнца. В таблице (на следующей странице) для каждого из 21 дней приведены значения рефракции у горизонта r . Для сравнения даны истинные значения r_0 , полученные по формулам сферической тригонометрии (не требуется от участников). Мы видим, что указанная методика позволяет определить величину рефракции с точностью лучше $1'$, а в интервале от 14 до 23 марта – с точностью лучше $0.1'$.

Вообще говоря, для решения задачи нет необходимости вычислять значение рефракции для каждого из дней. Достаточно выделить характерные дни с равной температурой (давлением), чтобы определить зависимость рефракции от давления (температуры). При этом лучше выбирать дни ближе к равноденствию, когда точность вычисления величины r лучше.

Обратим внимание на восходы Солнца 15, 16 и 18 марта, когда температура была одинакова (-6°C), а давление существенно различалось. Можно убедиться, что для них рефракция оказывается в точности пропорциональной давлению:

Дата	$T, ^{\circ}\text{C}$	$P, \text{мм рт. ст.}$	$r, '$	$r_0, '$	
Март	8	-28	749	49.53	50.36
	9	-21	754	46.94	47.57
	10	-24	747	48.02	48.46
	11	-27	746	49.43	49.72
	12	-20	741	46.12	46.31
	13	-20	734	45.76	45.88
	14	-12	730	42.10	42.17
	15	-6	740	40.08	40.12
	16	-6	748	40.54	40.55
	17	+1	738	36.95	36.95
	18	-6	731	39.63	39.63
	19	-5	733	39.30	39.30
	20	-14	739	43.56	43.56
	21	-10	745	42.16	42.15
	22	-5	746	40.03	40.00
	23	-10	750	42.51	42.43
	24	-8	760	42.23	42.10
	25	-5	770	41.50	41.29
	26	-10	766	43.69	43.34
	27	-18	766	47.50	46.97
	28	-10	766	44.04	43.34

$$r(T = -6^\circ \text{C}) = r_{760} \frac{P}{760 \text{ мм рт. ст.}}; \quad r_{760}(T = -6^\circ \text{C}) = 41.2'.$$

20 марта температура опустилась до -14°C . Записывая аналогичную зависимость $r(P)$ для этой температуры

$$r(T = -14^\circ \text{C}) = r_{760}(T = -14^\circ \text{C}) \frac{P}{760 \text{ мм рт. ст.}},$$

с учетом давления в это утро (739 мм рт. ст.), получаем значение

$$r_{760}(T = -14^\circ \text{C}) = r(P, T) \frac{760 \text{ мм рт. ст.}}{P} = 44.8'.$$

Обратим внимание на высокие значения рефракции при минусовых температурах. Будем считать, что величина r_{760} линейно меняется с температурой (в реальности, это так только в узких интервалах температур):

$$r_{760} = A + B \cdot T(^{\circ}\text{C}).$$

Тогда, имея данные для температур T_1 и T_2 :

$$A = \frac{r_{760}(T_2)T_1 - r_{760}(T_1)T_2}{T_1 - T_2} = 38.5';$$

$$B = \frac{r_{760}(T_1) - r_{760}(T_2)}{T_1 - T_2} = -0.45' / ^{\circ}\text{C}.$$

Полная формула для рефракции в зависимости от температуры и давления имеет вид:

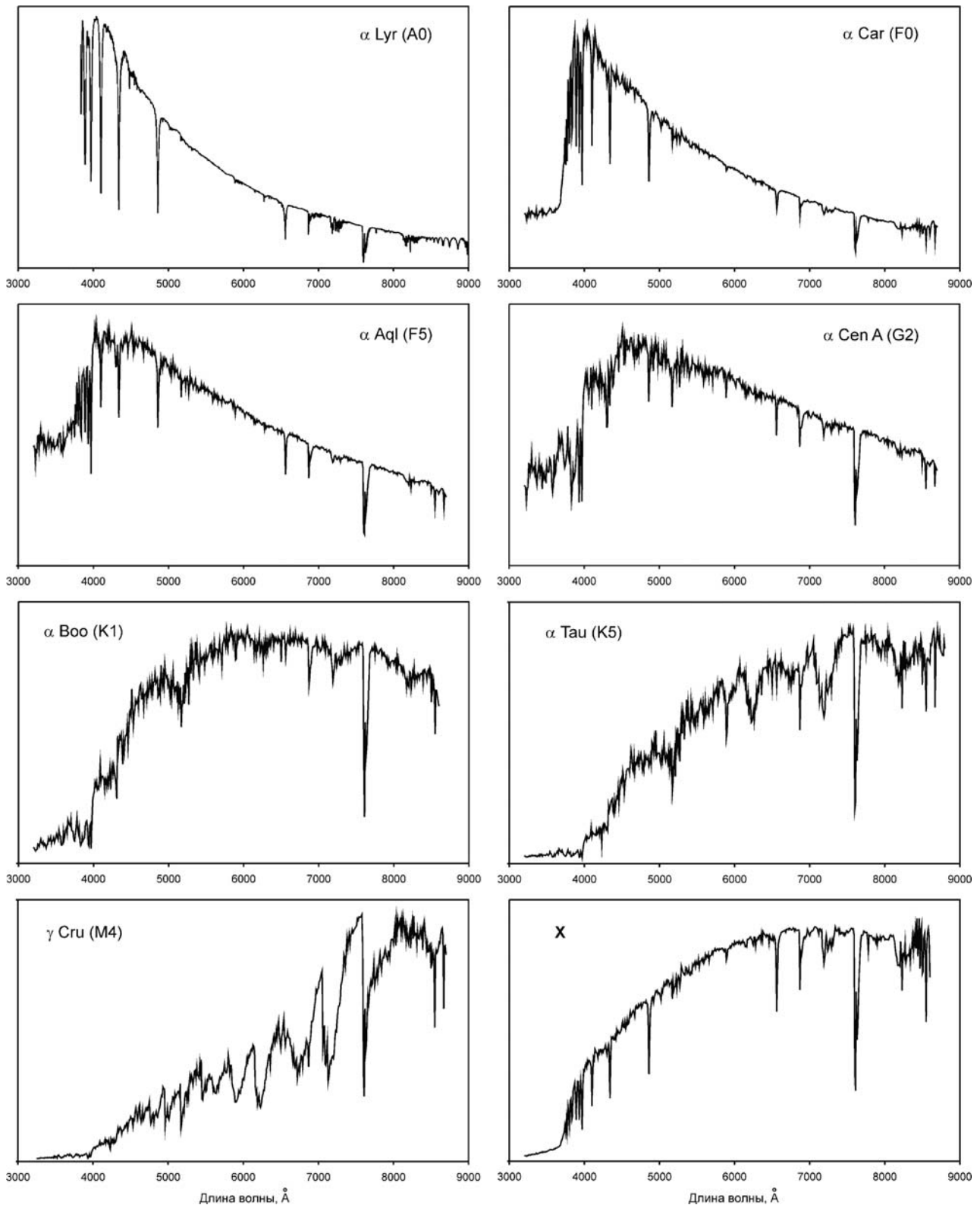
$$r(P, T) = (38.5' - 0.45'T(^{\circ}\text{C})) \frac{P}{760 \text{ мм рт. ст.}}.$$

XI. 2 ЗВЕЗДНЫЕ СПЕКТРЫ

О.С. Угольников

? Перед Вами спектры семи близких звезд некоторых спектральных классов от А0 до М4 (указаны в скобках), а также спектр еще одной звезды X в диске Галактики. Определите по нему расстояние до звезды X и ее спектральный класс, если известно, что он лежит в том же интервале от А0 до М4. Все спектры получены с Земли с одинаковым спектральным разрешением и высотой звезд над горизонтом. Лучевые скорости всех звезд малы. Масштабы графиков по ординате отличаются. Межзвездное поглощение света в диске Галактики составляет $(0.002^{\text{м/пк}}) \cdot (\lambda/5500 \text{ \AA})^{-1.3}$.

Практический тур – 11 класс



❗ По своей общей форме спектр звезды X напоминает спектры звезд класса K (Арктур и Альдебарана), однако некоторые линии (характерные острые минимумы) у спектра звезды X совершенно другие. По условию задачи, спектры получены с Земли при одинаковой высоте звезд над горизонтом. Поэтому у всех звезд должны наблюдаться теллурические линии, относительная глубина которых не будет зависеть от звезды и никак не связана с ее спектральным классом.

Характерный пример такой линии (точнее, сложной системы линий) – поглощение молекулярным кислородом O_2 вблизи 7600 ангстрем.

Спектральный класс звезды нужно определять по линиям, которые должны принадлежать самим звездам. Причем эти линии должны соответствовать распространенным химическим элементам, в противном случае их интенсивность будет существенно зависеть от содержания того или иного элемента, которое может сильно изменяться от звезды к звезде. В нашем случае за основу нужно брать линии бальмеровской серии водорода, которые видны в спектрах звезд. Их интенсивность существенно зависит от температуры, тем самым облегчая определение спектрального класса звезды **X**.

Выберем линии H_α (6563 ангстрема) и H_β (4861 ангстрем) и отметим их на спектрах. Мы видим, что эти линии сильны у звезд классов A и F, слабее у звезд класса G, уже с трудом заметны у звезд класса K и вообще отсутствуют у звезды класса M. Связано это с тем, что для своего образования линии бальмеровской серии требуют наличия возбужденных атомов водорода с электроном на втором уровне, а при низких температурах таких атомов практически нет (отметим, что у горячих звезд классов O и B линии бальмеровской серии тоже слабеют, но уже из-за ионизации водорода).

Так как спектры звезд имеют одинаковое разрешение, мы можем примерно оценить интенсивность линии по величине максимального ослабления энергетического потока от звезды (в процентах). Отметим эти величины на графиках. Сделав то же самое для звезды **X**, мы видим, что по этой характеристике она похожа на звезду Канопус (α Киля, спектральный класс F0). В этом мы можем убедиться и по другим звездным спектральным линиям. Таким образом, мы определили спектральный класс звезды **X**.

Общий вид спектра звезды **X** не похож на спектр Канопуса, так как он искажен межзвездным поглощением. Коротковолновое излучение поглощается сильнее, что вызывает общее "покраснение" звезды. Чтобы определить его и найти расстояние, вычислим значения спектрального энергетического потока J от Канопуса и звезды **X** на трех длинах волн, не содержащих сильных линий:

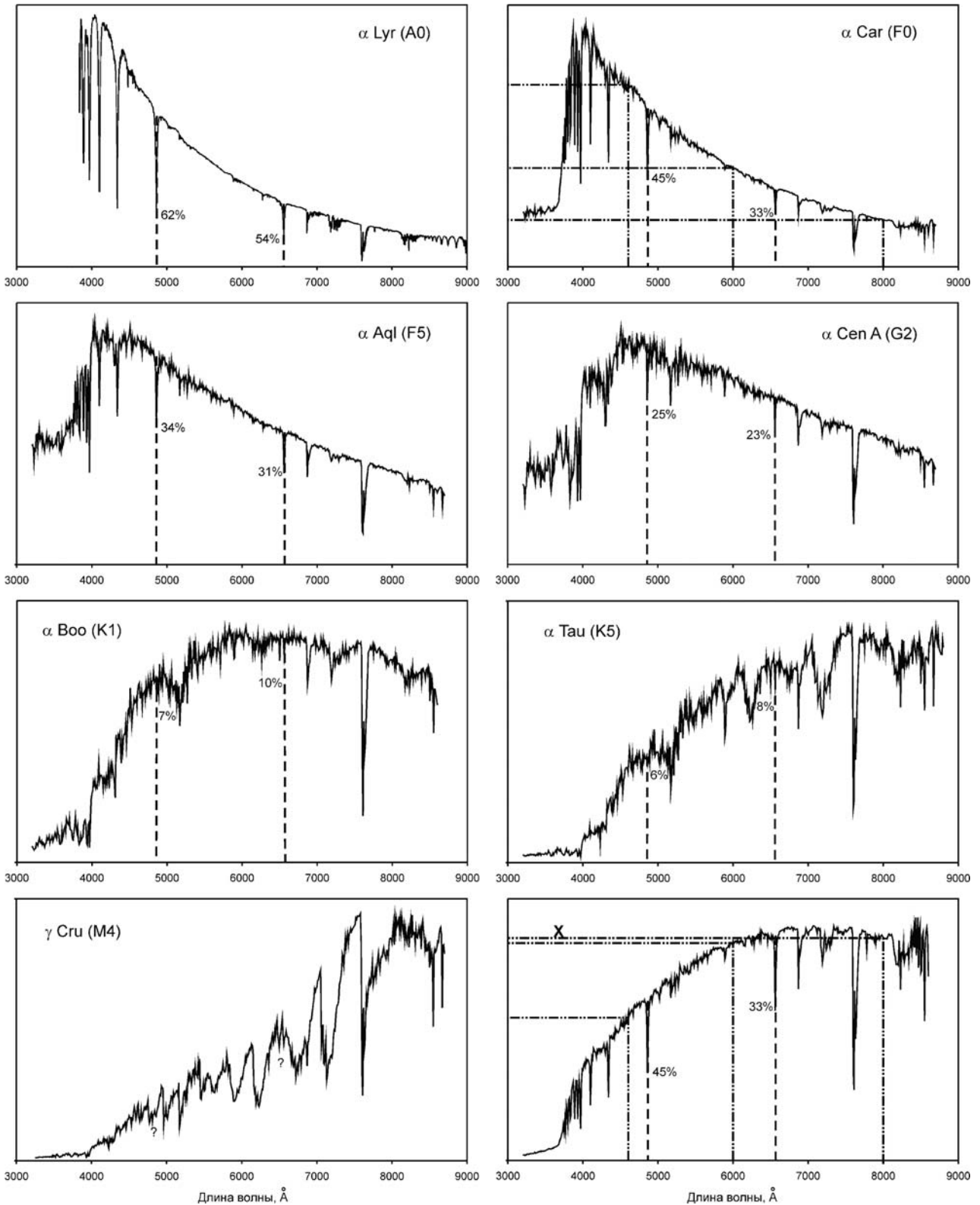
Длина волны, λ	J_1 (α Car)	J_2 (X)	$-2.5 \lg (J_2/J_1)$	$(\lambda/5500 \text{ \AA})^{-1.3}$
4600	0.69	0.55	+0.25	1.261
6000	0.38	0.83	-0.85	0.893
8000	0.18	0.85	-1.69	0.614

За единицу в обоих случаях принят вертикальный масштаб соответствующего графика, очевидно, эти масштабы разные для разных звезд. Если бы поглощения не было, отсчеты J_2 и J_1 были бы пропорциональны друг другу. В действительности мы получаем:

$$J_2 = C \cdot J_1 \cdot 10^{-0.4E(\lambda)}; \quad E(\lambda) = 0.002 \cdot D \cdot \left(\frac{\lambda}{5500 \text{ \AA}} \right)^{-1.3}.$$

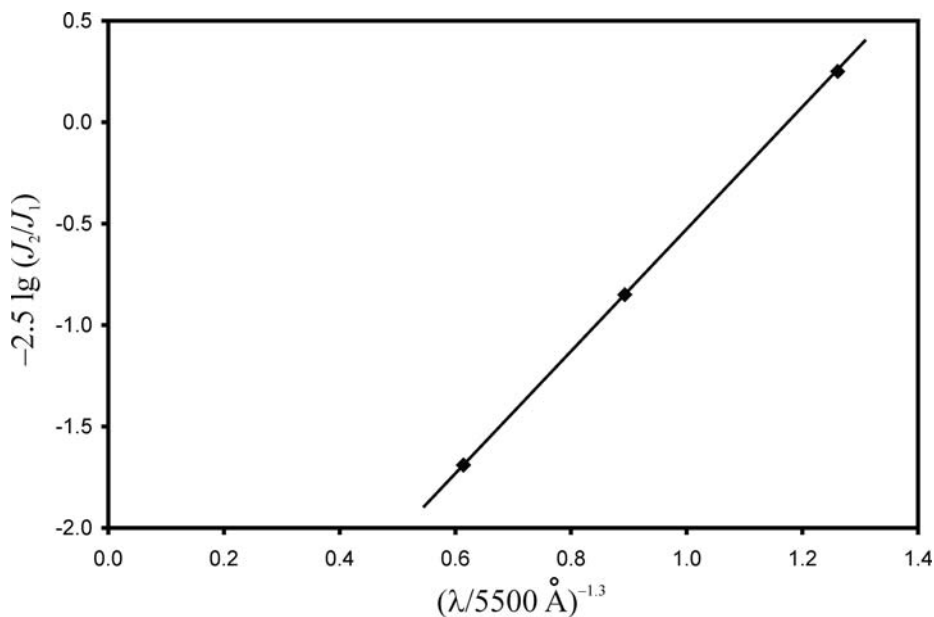
Здесь C – коэффициент пропорциональности, связанный с разной яркостью звезд, D – расстояние до звезды **X**. Логарифмируя эту формулу, имеем:

Практический тур – 11 класс



$$-2.5 \lg \frac{J_2}{J_1} = -2.5 \lg C + 0.002 \cdot D \cdot \left(\frac{\lambda}{5500 \text{ Å}} \right)^{-1.3}.$$

Величины $(-2.5 \lg (J_2/J_1))$ и $(\lambda/5500 \text{ Å})^{-1.3}$ должны быть пропорциональны друг другу со сдвигом соответствующей прямой за счет наличия коэффициента C . В этом можно убедиться, построив соответствующий график:



Угловым коэффициентом прямой равен

$$K = \frac{2.5 \lg \frac{J_2}{J_1}(\lambda_A) - 2.5 \lg \frac{J_2}{J_1}(\lambda_B)}{\left(\frac{\lambda_B}{5500 \text{ \AA}}\right)^{-1.3} - \left(\frac{\lambda_A}{5500 \text{ \AA}}\right)^{-1.3}} \approx 3.$$

В качестве длин волн λ_A и λ_B можно использовать любые две длины волны из охваченного спектрального диапазона вдали от сильных линий. Расстояние до звезды X составляет

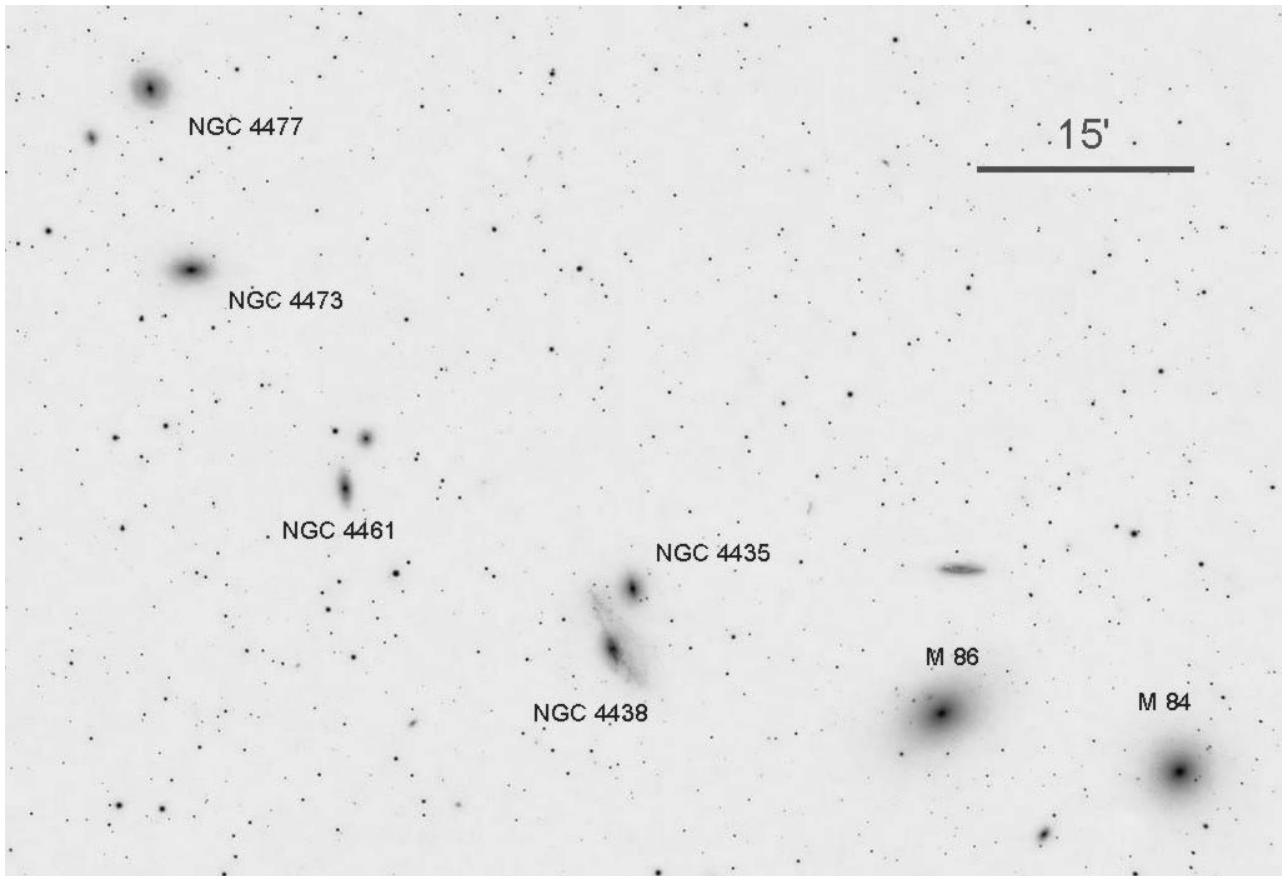
$$D = \frac{K}{0.002} = 1500 \text{ пк.}$$

XI. 3 ЦЕПОЧКА МАРКАРЯНА

Н.Н. Шахворостова

? Перед Вами фотография галактик, входящих в известную «цепочку Маркаряна» – часть скопления галактик в созвездии Девы (негатив). Галактики удалены на 16 Мпк от Земли. В таблице приведены значения лучевой скорости и видимой звездной величины каждой из этих галактик. В предположении, что «цепочка Маркаряна» является гравитационно-связанной системой, оцените массовый вклад темной материи в этой системе. Считать, что светимость галактик равна 1/10 светимости Солнца на солнечную единицу звездной массы. Межзвездным поглощением света пренебречь.

! Будем считать систему гравитационно-связанной, если ее полная энергия отрицательна. Это не значит, что система останется такой вечно и не потеряет ни одного своего члена, но в этом случае она не сможет распасться полностью.



Чтобы найти величину энергии, нужны данные о массах и скоростях в этой системе. Из наблюдений мы знаем яркости галактик, пропорциональные их массе, и одну компоненту скорости каждой из них. Введем значение яркости галактики, определяемое ее звездной величиной:

Галактика	v_R , км/с	m
NGC 4374 (M84)	1060	9.2
NGC 4406 (M86)	-244	8.9
NGC 4435	801	10.8
NGC 4438	71	10.0
NGC 4461	1931	11.1
NGC 4473	2244	10.2
NGC 4477	1355	10.4

$$J_i = CM_i = 10^{-0.4m_i}$$

Здесь m_i – видимая звездная величина галактики с номером i , M_i – ее видимая (звездная) масса, C – некоторая постоянная. Определим лучевую скорость центра видимой массы всей "цепочки Маркаряна":

$$V_0 = \frac{\sum_i M_i v_i}{\sum_i M_i} = \frac{\sum_i J_i v_i}{\sum_i J_i} = +670 \text{ км/с.}$$

Каждая из галактик движется вдоль луча зрения относительно центра масс со скоростью $v_i - V_0$. Среднеквадратичная собственная лучевая скорость галактик составляет

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{\sum_i M_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i M_i}} = \sqrt{\frac{\sum_i J_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i J_i}}.$$

В действительности, галактики движутся вдоль трех направлений, квадраты компонент скорости складываются друг с другом. Будем считать вклад в энергию от движения по всем трем осям одинаковым. Тогда среднеквадратичная собственная скорость галактик равна

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \sum_i M_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i M_i}} = \sqrt{\frac{3 \sum_i J_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i J_i}} = 1500 \text{ км/с}.$$

Для простоты решения мы вполне могли считать массы галактик одинаковыми. В этом случае мы бы получили несколько иное значение средней лучевой скорости (+1000 км/с), но практически такую же среднеквадратичную скорость (1500 км/с).

Заметим, что скрытая масса, входящая в "цепочку Маркаряна", взаимодействует с видимой массой и также движется, и для нее мы предполагаем ту же характерную среднеквадратичную скорость. Чтобы система с такими скоростями была связанной, модуль потенциальной энергии должен превосходить кинетическую энергию. Обозначим характерный радиус системы как R . Тогда

$$\frac{GM^2}{2R} > \frac{M\bar{v}^2}{2}; \quad M > \frac{\bar{v}^2 R}{G}.$$

Радиус системы нам известен, так как он виден под углом $40'$ с расстояния 16 Мпк. Он равен 200 кпк, и это означает, что полная масса системы не меньше $2 \cdot 10^{44}$ кг или 10^{14} масс Солнца.

Определим теперь массу видимого вещества в "цепочке Маркаряна". Вычисляя суммарную видимую звездную величину всех галактик, получаем 7.7^m . Пренебрегая межзвездным поглощением (как в галактиках цепочки, так и в нашей Галактике), получаем абсолютную звездную величину системы:

$$m_A = m + 5 - 5 \lg D = -23.3.$$

Здесь D – расстояние до системы. Абсолютная звездная величина системы на 28^m меньше, чем у Солнца. Следовательно, светимость "цепочки Маркаряна" равна $10^{0.4 \cdot 28}$ или 160 миллиардам светимостей Солнца. По условию задачи, одна солнечная светимость в галактиках создается звездной массой в 10 масс Солнца. В итоге, суммарная видимая масса системы M_V равна $1.6 \cdot 10^{12}$ масс Солнца. Предположение о гравитационной связанности системы ведет к величине вклада темного вещества:

$$\mu_D = \frac{M - M_V}{M} = 0.984.$$

Это очень большая величина. По-видимому, цепочка Маркаряна не является гравитационно-связанной системой. К подобному выводу пришел сам В.Е. Маркарян в своей работе 1961 года.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс.....	3
10 класс.....	9
11 класс.....	16

ПРАКТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс.....	27
10 класс.....	32
11 класс.....	37



1



2



3



4



5



6



7



8



9